



Forçage harmonique d'écoulements en rotation : vents zonaux, ondes inertielles et instabilités

Alban Sauret

► To cite this version:

Alban Sauret. Forçage harmonique d'écoulements en rotation : vents zonaux, ondes inertielles et instabilités. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Aix-Marseille Université, 2013. Français. NNT : . tel-00795251v3

HAL Id: tel-00795251

<https://theses.hal.science/tel-00795251v3>

Submitted on 2 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université d'Aix-Marseille
Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre

Thèse

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

Spécialité : Mécanique et physique des fluides

École doctorale : Physique, modélisation et sciences pour l'ingénieur

présentée par

Alban Sauret

**Forçage harmonique d'écoulements en rotation :
vents zonaux, ondes inertielles et instabilités**

soutenue le 1 Février 2013 devant le jury composé de :

F.H. Busse	Professeur	Universität Bayreuth	<i>Examineur</i>
C.P. Caulfield	Professeur	University of Cambridge	<i>Rapporteur</i>
M. Le Bars	CR CNRS	IRPHE, Marseille	<i>Co-directeur de thèse</i>
S. Le Dizès	DR CNRS	IRPHE, Marseille	<i>Directeur de thèse</i>
F. Moisy	Professeur	Université Paris Sud, FAST	<i>Rapporteur</i>
J. Noir	Chercheur	ETH Zürich	<i>Examineur</i>
J.F. Scott	Professeur	École Centrale de Lyon, LMFA	<i>Examineur</i>

Remerciements

C'est un exercice assez difficile, de résumer en deux pages, les remerciements envers tous ceux qui ont pu jouer un rôle, de près ou de loin, dans cette thèse. En effet, ce manuscrit représente un peu plus de trois ans de ma vie, et même si sur le papier tout peut sembler s'enchaîner logiquement, certains obstacles qui ont du être franchis n'auraient pas pu l'être sans l'aide et le soutien de nombreuses personnes.

Tout d'abord, mes premiers remerciements s'adressent à mes deux directeurs de thèse, Stéphane Le Dizès et Michael Le Bars. Je tiens à les remercier de m'avoir permis de travailler avec une grande autonomie, ainsi que de m'avoir laissé satisfaire ma curiosité scientifique en explorant des sujets totalement différents de ma thématique de thèse. Il est impossible de définir ce qu'est un encadrement idéal de thèse, mais au bout de ces trois années, j'ai l'impression que leur manière de faire a été ce que je pouvais espérer de mieux : ils ont su à la fois me laisser de l'indépendance, tout en me remettant sur les rails quand cela était nécessaire. Tout au long de cette thèse, ils ont su se montrer disponibles et motivés envers mon travail. Michael m'a permis de voir le monde sous un aspect *non-linéaire* et m'a également permis de faire le lien entre les expériences menées au laboratoire, les théories développées mais aussi les applications astrophysiques. Pour cela je l'en remercie. Stéphane m'a initié aux rudiments de la théorie, le travail présenté dans ce manuscrit doit énormément à sa rigueur et à ses conseils.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du jury qui m'ont fait le plaisir, et l'honneur, d'évaluer ce travail : Friedrich Busse, Jérôme Noir, Julian Scott ainsi que les deux rapporteurs Frédéric Moisy et Colm Caulfield. En particulier, merci Frédéric pour tes remarques pertinentes sur la physique des phénomènes observés. I would like to thank you Colm for accepting to evaluate this manuscript, especially as it was written in French! It was a real pleasure to see you in Marseille and a honor to have you in my defense comittee.

Le travail effectué ces dernières années a également profité de discussions ou de collaborations d'un certain nombre de personnes que je tiens à remercier. Tout d'abord merci à Patrice Le Gal, qui m'a convaincu lors de son cours de M2 à l'ENS Lyon de venir effectuer ma thèse à l'IRPHE et avec qui j'ai pris grand plaisir par la suite à discuter des dernières avancées de mes recherches. Thierry Dauxois m'a aussi grandement guidé sur les chemins du monde de la recherche, depuis les cours de M1 jusqu'aux conseils sur le choix de ma thèse, je l'en remercie. Je tiens également à remercier David Cébron avec qui j'ai pu avoir de nombreux échanges d'idées (parfois intéressantes, parfois un peu moins...) lors de sa thèse à l'IRPHE puis également après son départ à Zurich. Tout au long de la thèse, le travail sur la libration a pu bénéficier de nombreuses discussions avec Jérôme Noir, je l'en remercie. Le dispositif expérimental a énormément profité des améliorations apportées par Cyprien Morize durant son année à l'IRPHE avant que je ne débute ma thèse. Comprendre la notion de Stokes Drift dans nos écoulements

en rotation fut assez complexe, merci à Wietze Herreman pour en avoir éclairer certaines parties (notamment la veille de la soutenance!). Il est parfois difficile d'échanger entre membres de différentes communautés, malgré cela les discussions menées avec Nicolas Rambaux sur les situations astrophysiques de libérations ont été très intéressantes et instructives. Il est impossible de nommer en détails toutes les personnes qui ont pu m'aider à comprendre certaines notions importantes utilisées dans le cadre de ma thèse, néanmoins je souhaiterais remercier pêle-mêle : Michel Rieutord, Caroline Nore, Pierre-Philippe Cortet, ... Bref, beaucoup de monde à remercier qui a pu permettre à cette thèse de devenir ce qu'elle est aujourd'hui.

En plus de mon travail sur les fluides tournants, j'ai eu le plaisir de participer à une école d'été de 10 semaines à Woods Hole en 2012. Je tiens à remercier Neil Balmforth et Colm Caulfield de m'avoir permis et aidé à fabriquer, à partir de rien, un dispositif expérimental de bulldozer tournant qui m'a permis de m'initier au monde des milieux granulaires. Je tiens également à remercier Claudia Cenedese de m'avoir laissé jouer dans le labo avec toutes mes petites billes et mon sable ainsi que les différents professeurs et chercheurs présents! Cet été a été particulièrement agréable grâce à la présence des autres fellows : Bevin, Cédric, Duncan, et tous les autres... et de nos parties de softball (merci à George Veronis pour ses cours accélérés), les nombreux barbecues ou les repas du Vendredi soir à Captain Kidd (et sa PBR).

Avant cet été là, j'ai eu l'occasion de passer 2 mois en 2011 à Hong Kong pour travailler dans un domaine différent. Je remercie Anderson Shum de son invitation. Nous avons commencé à travailler ensemble alors que je n'étais qu'un stagiaire de M1 à Harvard, nos études se sont poursuivies et ce fut un réel plaisir de venir développer un dispositif microfluidique (et de faire du tourisme) à Hong Kong. Merci aux différents membres du laboratoire d'avoir rendu cet été-là agréable et de m'avoir fait découvrir le vrai *Dim Sum*. Merci donc à Peter, Gregory, Zero, Zhou et Yang. And I promise Anderson, I will come back in HKU as soon as possible!

Il n'est parfois pas nécessaire d'aller aussi loin pour s'intéresser à d'autres problèmes. Je tiens à remercier grandement Sylvain Viroulet de m'avoir laissé jouer avec lui sur son dispositif expérimental de génération de vague par un effondrement granulaire et d'obtenir de superbes résultats (et de ne rien avoir cassé, pour l'instant...). Merci également à Olivier Kimmoun qui nous a aidé pour les champs PIV, les mesures de vagues et différents aspects expérimentaux. Il me paraît également important de remercier Olivier Pouliquen, dont j'ai pu profiter plusieurs fois de l'expérience des milieux granulaires.

Une thèse ne se résume pas uniquement à de la recherche : j'ai aussi eu la chance d'effectuer un monitorat à l'université d'Aix-Marseille. Tour-à-tour j'ai profité de l'expérience de Marc Georgelin, Julien Deschamps et Simona Bodea. Merci à vous de m'avoir fait confiance et de m'avoir laissé gérer mes groupes de TD/TP. Ce fut une expérience particulièrement enrichissante qui me permettait de sortir de mes calculs théoriques ou du cadre du laboratoire.

Je n'oublie pas non plus les personnes qui font fonctionner l'IRPHE. Merci aux deux directeurs successifs Michel Provansal puis Uwe Ehrenstein de m'avoir accueilli au sein du laboratoire. Une thèse ne pourrait pas se dérouler sans la présence du personnel technique de l'IRPHE, je les en remercie tous pour leur aide et leur apport au quotidien (et notamment la maintenance de la machine à café!).

Merci aussi à l'ensemble des doctorants, postdoc et chercheurs de l'IRPHE qui ont rendu la vie de doctorant moins monotone à travers les pauses-café, les sorties, les road-trip en Californie, le sport, ... Merci à vous Sylvain, Marie-Laure, David, Oriane, Pierre-Yves, Hadrien, Adrien, Henri, Romain (et les grandes discussions à Harvard Square), Cyprien, Floryne, Luis et tous ceux que j'oublie.

En dernier point, la thèse est un travail qui demande beaucoup de temps. Malgré tout il

reste quand même un peu de place pour quelques activités extérieures. Merci aux Astariens de la premier heure avec qui nous avons pu faire de superbes sorties en canoé, accrobranche, rando, VTT... dans la région marseillaise et au-delà. Merci à ma coéquipière et nos sortie de trail (qui peut être assez fou pour aller courir 30 km le Dimanche matin dans les calanques, ...).

Merci à ma famille pour leur soutien constant et pour me redemander sans cesse ce que je fais dans la vie.

Je ne trouve pas les mots pour la remercier comme il le faudrait, mais merci à Virginie pour sa présence, son soutien infaillible, ses encouragements. Merci...

What here shall miss, our toil shall strive to mend.

William Shakespeare

Table des matières

Avant-propos	i
I Introduction	1
1 Forçages harmoniques et écoulements tournants	3
1.1 Forçages harmoniques et mécanique des fluides	4
1.1.1 Applications industrielles	4
1.1.2 Géophysique et astrophysique	6
1.2 Quelques notions sur les fluides tournants	8
1.2.1 Équation de Navier-Stokes en référentiel non-galiléen	8
1.2.2 Adimensionnement	9
1.2.3 Rotation solide et théorème de Taylor-Proudman	9
1.2.4 Ondes inertielles	10
1.2.5 Ondes inertielles et ondes internes	12
1.2.6 Modes inertiels dans une sphère	12
1.2.7 Attracteurs dans une coquille sphérique	16
1.2.8 Couches visqueuses dans les écoulements en rotation	16
1.3 Modélisation des forçages mécaniques sur un fluide en rotation	18
1.3.1 Librations	18
1.3.2 Marées	23
1.3.3 Précession	25
1.4 Instabilités et forçages d'écoulements en rotation	26
1.4.1 Instabilité centrifuge	26
1.4.2 Instabilité de cisaillement	28
1.4.3 Résonance paramétrique	29
1.4.4 Forçage vs. instabilité	30
1.5 Effets d'un forçage harmonique	30
2 Méthodes	35
2.1 Approche analytique	36
2.1.1 Couches d'Ekman et écoulement en volume	36
2.1.2 Ondes inertielles	36
2.1.3 Approche asymptotique et écoulement zonal	36
2.2 Dispositif expérimental	37

2.2.1	Présentation du dispositif	37
2.2.2	Déformation de marées au laboratoire	38
2.2.3	Forçage de libration longitudinale	40
2.2.4	Mesures qualitative et quantitative	41
2.3	Approche numérique	44
2.3.1	Principe du modèle numérique	44
2.3.2	Validation du modèle numérique	46
II	Vent zonal en l'absence d'ondes inertielles	49
3	Étude analytique du vent zonal	51
3.1	Introduction	52
3.2	Cadre de l'étude asymptotique	53
3.2.1	Formulation mathématique	53
3.2.2	Approche perturbative	54
3.3	Réponse linéaire au forçage	55
3.4	Écoulement non-linéaire stationnaire : le vent zonal	57
3.4.1	Structure asymptotique de l'écoulement	57
3.4.2	Solution dans la couche d'Ekman	60
3.4.3	Correction non-linéaire dans le volume	61
3.4.4	Solution dans les couches de Stewartson	64
3.5	Limite des faibles fréquences de libration $\omega \rightarrow 0$	67
3.6	Discussion et validité pour $\omega \in [0; 2]$	68
3.7	Conclusion	69
4	Vent zonal induit par forçage harmonique : validation et extrapolation	71
4.1	Vent zonal en géométrie sphérique	72
4.1.1	Vent zonal dans une sphère pour $\omega \rightarrow 0$	72
4.1.2	Vent zonal dans une sphère pour $\omega > 2$	76
4.1.3	Comparaison numérique dans une coquille sphérique	78
4.2	Libration longitudinale en géométrie axisymétrique	81
4.2.1	De la sphère au sphéroïde	81
4.2.2	Libration longitudinale d'un cylindre axisymétrique	83
4.3	Analogie entre forçage temporel et forçage azimutal	88
4.3.1	Dispositif expérimental équivalent	88
4.3.2	Formulation mathématique	89
4.3.3	Discussion	89
4.4	Libration longitudinale d'un conteneur non-axisymétrique	90
4.4.1	Formulation mathématique	91
4.4.2	Méthode expérimentale	92
4.4.3	Résultats et comparaisons	94
4.4.4	Étude numérique	97
4.4.5	Discussion	100
4.5	Conclusion	101

III	Instabilité centrifuge et génération spontanée d'ondes inertielles	103
5	Instabilité centrifuge	105
5.1	Observations expérimentales et numériques	105
5.2	Première approche en géométrie cylindrique	106
5.3	Détermination théorique du seuil d'apparition de l'instabilité	108
5.4	Comparaison numérique et expérimentale	112
5.4.1	Méthodologie	112
5.4.2	Influence du nombre d'Ekman	113
5.4.3	Influence de la fréquence de libration ω	114
5.5	Conclusion	116
6	Génération spontanée d'ondes inertielles	117
6.1	Introduction	118
6.2	Formulation mathématique	118
6.3	Étude numérique en géométrie sphérique	119
6.3.1	De l'écoulement stable au régime turbulent	119
6.3.2	Caractérisation des ondes inertielles générées spontanément	120
6.3.3	Influence de l'amplitude de forçage	125
6.3.4	Observations pour différentes fréquences de libration	128
6.4	Comparaison avec un modèle analytique idéalisé	128
6.4.1	Onde émise dans le volume	128
6.4.2	Perspectives analytiques	132
6.5	Génération spontanée d'ondes inertielles dans un cylindre	133
6.6	Conclusion	136
IV	Dynamique en présence d'ondes inertielles	139
7	Vent zonal et instabilités générés par résonance d'ondes inertielles	141
7.1	Introduction	142
7.1.1	Déviation à l'écoulement théorique en géométrie cylindrique	142
7.1.2	Modes résonants en géométrie sphérique	146
7.1.3	Études antérieures	147
7.2	Résonance de modes inertiels dans une sphère	149
7.2.1	Influence de la fréquence de forçage	149
7.2.2	Influence de l'amplitude de marées	152
7.2.3	Influence du nombre d'Ekman	155
7.3	Instabilité barotrope générée par les vents zonaux	158
7.3.1	Constatation expérimentale	158
7.3.2	Mesures quantitatives	159
7.3.3	Loi d'échelle	163
7.4	Vent zonal en présence d'un noyau interne	164
7.4.1	Modes inertiels dans la coquille	165
7.4.2	Visualisation des ondes inertielles	165
7.4.3	Instabilité de cisaillement	165
7.4.4	Perspectives	167
7.5	Conclusion	167

8	Latitude critique	169
8.1	Introduction	170
8.2	Latitude critique aux pôles	173
8.3	Latitude critique à l'équateur	176
8.4	Latitude critique en $\theta_c \in]0; \pi/2[$	177
8.5	Conclusions et perspectives	178
9	Conclusions et Perspectives	179
9.1	Résumé de la thèse et applications planétaires	179
9.1.1	Vent zonal généré par les couches d'Ekman	179
9.1.2	Instabilité centrifuge et génération spontanée	180
9.1.3	Vent zonal généré par résonance de mode inertiel et instabilité de cisaillement	181
9.2	Perspectives	182
	Annexes	185
	Annexe A Compléments au chapitre 3	187
1	Expressions du chapitre 3	187
1.1	Expressions des coefficients A_l , B_l , C_l et D_l	187
1.2	Expression de la fonction $\mathcal{F}(\rho; \omega)$	188
2	Solution dans les couches de Stewartson	189
2.1	Couche externe $\rho > a$ de largeur $E^{1/4}$	190
2.2	Couche externe $\rho < a$ de largeur $E^{2/7}$	190
2.3	Couche interne d'épaisseur $E^{1/3}$	191
	Annexe B Analogie entre forçage temporel et forçage azimutal	195
1	Formulation mathématique	195
2	Solution linéaire dans les couches d'Ekman supérieure et inférieure	196
3	Écoulement non-linéaire	198
3.1	Écoulement non-linéaire dans le volume	198
3.2	Solution non-linéaire axisymétrique dans la couche limite	199
4	Discussion	200
	Annexe C Déformations optiques	203
1	Déformation optique dans le plan horizontal	204
2	Déformation optique dans le plan vertical	207
3	Exemple	209
	Annexe D Caractéristiques physiques de quelques planètes et satellites	211
	Annexe E Liste des publications	213
	Bibliographie	215

Avant-propos

*E pur si muove.
(Et pourtant elle tourne.)*

Galileo Galilei (apocryphe)

Alors que je suis assis dans mon bureau à écrire mon manuscrit de thèse, j'ai l'impression d'être immobile. Néanmoins, je suis en rotation permanente, et même, plus précisément, mon mouvement, selon le référentiel d'étude, est composé de plusieurs rotations. La Terre, par exemple, tourne sur elle-même, ce qui induit un écoulement dans les enveloppes fluides de notre planète. En plus de cette rotation de la Terre sur elle-même il faut tenir compte de la rotation de la Terre autour du Soleil en une année. Ce problème semble déjà assez complexe à cerner. Malgré cela, diverses perturbations s'ajoutent à la rotation de la Terre : un mouvement de précession, une variation temporelle de sa vitesse angulaire de rotation ainsi que des déformations de marées générées par la Lune ou le Soleil.

Notons également que la Terre, comme la plupart des planètes et satellites, est composée de différentes couches dont certaines, comme par exemple le noyau externe, sont fluides. La mécanique des fluides en rotation, permettant d'appréhender la dynamique interne de notre planète, a été un domaine en plein essor au cours du XX^e siècle. Ce cadre théorique permet d'étudier la présence et l'influence d'instabilités, d'écoulements turbulents ou d'ondes inertielles dans les couches fluides des planètes et satellites.

Les forçages précédemment évoqués sont généralement de petites amplitudes mais peuvent avoir une influence non négligeable sur la dynamique du fluide interne aux échelles planétaires. Ceci nous conduit à la problématique générale de ce travail :

Quels sont les effets d'un forçage harmonique sur la dynamique d'un écoulement en rotation ?

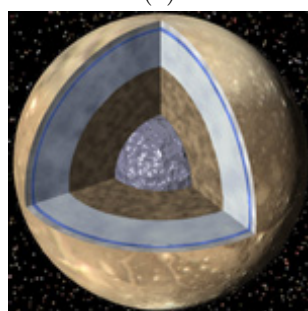


FIGURE 1 – Vue de Jupiter et des vents zonaux en surface (NASA/JPL).

En première approximation, un fluide placé dans un conteneur en rotation, tel qu'un cylindre ou une sphère, subit un écoulement de rotation solide : les particules de fluide décrivent un simple mouvement de rotation en bloc. Néanmoins, si nous ajoutons maintenant une petite perturbation à cette rotation, de grands effets peuvent se produire. Par exemple, on peut supposer que l'axe de rotation du conteneur est lui-même en rotation autour d'un second axe incliné par rapport au premier. Dans ce cas, on parle d'un mouvement de précession.



(a)



(b)

FIGURE 2 – (a) Ganymède, une des lunes de Jupiter.
(b) Structure interne de Ganymède montrant la présence possible d'un océan sous sa surface (NASA/JPL).

Notre expérience quotidienne nous montre aussi la présence de la force de marées : la Terre est déformée par la Lune en une ellipse, ce qui modifie la forme de toutes les enveloppes de notre planète. En présence de ces forçages, le mouvement du fluide devient plus complexe et peut être source d'*instabilités*, d'*ondes inertielles* ou d'*écoulements zonaux*. Bien que nous ayons illustré le principe d'une perturbation à l'écoulement sur le cas de la précession ou des marées, il existe en fait plusieurs manières de perturber la rotation d'un fluide, comme nous le verrons dans la suite. En pratique, dans de nombreuses applications, comme par exemple en géophysique ou en astrophysique, plusieurs forçages harmoniques se superposent à l'écoulement tels que les marées, la libration longitudinale ou latitudinale et la précession. Il est impossible d'étudier d'un point de vue expérimental ou analytique le résultat de tous ces forçages harmoniques simultanément. Nous décomposons donc les différentes perturbations, puis étudions les effets d'un forçage donné sur l'écoulement en combinant une approche analytique, expérimentale et numérique afin d'en déduire des lois générales régissant la dynamique du fluide.

Afin de comprendre les différents termes et concepts que nous utilisons dans ce mémoire, nous présentons dans le **chapitre 1** quelques notions essentielles sur la dynamique des fluides touronnants. Nous illustrons les différents forçages qui peuvent s'appliquer sur un fluide en rotation avant de souligner la distinction entre un écoulement résultant d'un forçage et un écoulement in-

stable. Pour finir, nous discutons les problématiques à résoudre. Le **chapitre 2** dresse un panorama des méthodes théorique, expérimentale et numérique utilisées afin d'appréhender ce problème. Nous soulignons le cadre théorique des écoulements à faibles nombres d'Ekman, situation rencontrée en géophysique et astrophysique. Nous présentons la liste des principales hypothèses de travail permettant, dans certaines limites, de décrire analytiquement l'écoulement induit par un forçage. Le dispositif expérimental dédié à l'étude d'un forçage de marées ou de libration longitudinale dans une sphère est ensuite décrit ainsi que les différentes méthodes de diagnostic de l'écoulement généré. Dans certains cas, nous avons également utilisé une approche numérique qui est expliquée puis validée dans ce même chapitre.

Le **chapitre 3** se focalise sur l'étude de l'écoulement non-linéaire induit par un forçage de libration longitudinale dans une coquille sphérique. Dans une gamme de paramètres où aucune onde inertielle n'est excitée, nous montrons qu'un écoulement stationnaire et axisymétrique, appelé *vent zonal*, est induit. L'étude analytique, effectuée en géométrie sphérique, est ensuite validée à la fois expérimentalement et numériquement dans le **chapitre 4**. Nous discutons également de la pertinence de ce vent zonal dans d'autres géométries. De plus, nous soulignons

l'analogie entre un forçage temporel et un forçage azimutal modélisant, par exemple, des effets de marées et générant un écoulement zonal dont les caractéristiques sont similaires au vent zonal obtenu dans le chapitre 3. Le cas de la libration longitudinale d'un conteneur non-axisymétrique est traité dans ce chapitre et nous montrons que la structure de la correction non-linéaire demeure inchangée.

En plus d'un écoulement non-linéaire nous montrons, dans le **chapitre 5**, qu'un forçage de libration longitudinale peut conduire à une *instabilité centrifuge* au voisinage de la paroi extérieure. Cette instabilité, caractérisée numériquement et analytiquement, peut conduire à une zone turbulente qui, à son tour, induit une *génération spontanée d'ondes inertielles* dans le volume. Ce sujet est discuté dans le **chapitre 6**. Nous étudions les caractéristiques de ces ondes inertielles émises dans le cas d'une zone turbulente localisée en géométrie sphérique ou étendue en géométrie cylindrique. Nous soulignons également la forte similitude entre ondes internes et ondes inertielles générées par une zone turbulente.

Alors que dans les premières sections nous avons négligé l'effet des ondes inertielles, le **chapitre 7** se concentre sur l'étude expérimentale de l'écoulement induit par la *résonance d'ondes inertielles*. Nous montrons que, dans ce cas-là, l'écoulement généré peut devenir bien plus intense et nous présentons des lois d'échelles obtenues à partir de mesures expérimentales de vitesse. Nous nous intéressons particulièrement au forçage de marées en géométrie sphérique et montrons expérimentalement qu'une *instabilité de cisaillement* peut être générée dans le volume par un forçage résonant. Finalement, le **chapitre 8** traite de l'écoulement au voisinage de ce que l'on appelle *les latitudes critiques*. Autour de ces zones, les lois d'échelles de couches limites habituelles ne sont plus valides. Une nouvelle approche analytique est développée dans les différents cas selon la position de la latitude critique. Les équations régissant la dynamique du fluide au voisinage de ces zones sont présentées.

Finalement, nous discutons dans la conclusion de ce manuscrit des implications, à l'échelle planétaire, de ces forçages.

Première partie

Introduction

Chapitre

1

Forçages harmoniques et écoulements tournants

I don't know anything, but I do know that everything is interesting if you go into it deeply enough.

Richard Feynman

Sommaire du chapitre

1.1	Forçages harmoniques et mécanique des fluides	4
1.1.1	Applications industrielles	4
1.1.2	Géophysique et astrophysique	6
1.2	Quelques notions sur les fluides tournants	8
1.2.1	Équation de Navier-Stokes en référentiel non-galiléen	8
1.2.2	Adimensionnement	9
1.2.3	Rotation solide et théorème de Taylor-Proudman	9
1.2.4	Ondes inertielles	10
1.2.5	Ondes inertielles et ondes internes	12
1.2.6	Modes inertiels dans une sphère	12
1.2.7	Attracteurs dans une coquille sphérique	16
1.2.8	Couches visqueuses dans les écoulements en rotation	16
1.3	Modélisation des forçages mécaniques sur un fluide en rotation	18
1.3.1	Librations	18
1.3.2	Marées	23
1.3.3	Précession	25
1.4	Instabilités et forçages d'écoulements en rotation	26
1.4.1	Instabilité centrifuge	26
1.4.2	Instabilité de cisaillement	28
1.4.3	Résonance paramétrique	29
1.4.4	Forçage vs. instabilité	30
1.5	Effets d'un forçage harmonique	30

Dans ce chapitre, nous discutons dans la section 1.1 des écoulements tournants dans les applications géophysiques/astrophysiques et industrielles et soulignons l'importance que peuvent prendre les forçages harmoniques, même de faibles amplitudes, sur l'écoulement final. Dans la section 1.2, nous présentons les bases nécessaires pour étudier la dynamique des fluides en rotation. L'équation de Navier-Stokes en référentiel tournant, les ondes inertielles et les couches

visqueuses sont abordées. Puis, dans la section 1.3, nous proposons une modélisation mathématique des forçages de libration longitudinale/latitudinale, de marées et de précession pour pouvoir décrire les mouvements du fluide soumis à ces forçages harmoniques. Finalement, nous discutons dans la section 1.4 de la différence entre une instabilité et un écoulement résultant d'un forçage et présentons les principes généraux des instabilités qui apparaîtront dans la suite de ce manuscrit.

1.1 Forçages harmoniques et mécanique des fluides

En se promenant sur une plage, il n'est pas rare de voir de nombreuses branches ou coquilles d'animaux morts sur le rivage. Comment ces objets ont-ils pu se déposer là ? Puisque les vagues sont oscillantes, tout ceci devrait rester en mer à errer perpétuellement. La présence de ces objets s'explique par un premier exemple d'écoulement moyen généré par un forçage harmonique, appelé *dérive de Stokes* (voir par exemple Craik, 2005; Stokes, 2009). Ce mécanisme génère un transport de matière associé à la propagation d'une onde présentant une inhomogénéité spatiale. Cette inhomogénéité implique une asymétrie de la trajectoire d'une particule de fluide advectée par les ondes entre l'écoulement lors de "l'aller" de l'oscillation et l'écoulement au "retour" de celle-ci. Ce mécanisme n'est pas anecdotique dans les vagues générées par le vent : une partie importante de la dérive à la surface de l'océan provient de ce mécanisme (Ardhuin *et al.*, 2009). Même si ce phénomène de dérive est usuellement de faible amplitude, sa présence n'est pas négligeable dans certaines situations telles que la pollution de l'océan lors de marées noires ou pour le transport de nutriments, par exemple dans les récifs coralliens (Monismith, 2007). Notons que ce mécanisme est un phénomène purement non-linéaire et varie comme le carré de l'amplitude de l'onde. Nous allons présenter dans la suite, quelques cas d'applications de ce phénomène non-linéaire, dans le cadre industriel puis tout particulièrement dans les systèmes en rotation qui constituent le coeur de cette thèse. Notons avant d'aller plus loin que la dérive de Stokes, présentée ici dans le cas des vagues, est un phénomène lagrangien, à l'inverse, les écoulements zonaux que nous allons considérer dans cette thèse sont de type eulérien (écoulements dits redressés ou de *steady streaming* (voir par exemple Riley, 2001)).

1.1.1 Applications industrielles

Le travail effectué au cours de cette thèse s'inscrit principalement dans un cadre géophysique et astrophysique. Néanmoins, la présence et l'influence d'un forçage harmonique dans des situations industrielles, telles que l'écoulement entre un rotor et un stator ou une pompe péristaltique, peuvent être importantes. Un forçage peut permettre, par exemple, de générer ou contrôler un écoulement (voir par exemple Hoepffner & Fukagata, 2009; Mamori *et al.*, 2010). En effet, une application usuelle d'un forçage harmonique dans le milieu industriel est le pompage péristaltique (Jaffrin & Shapiro, 1971; Terray *et al.*, 2002; Skaft-Pedersen *et al.*, 2009). Ce phénomène est utilisé afin de transporter un fluide dans un tube flexible que l'on peut placer dans un système en rotation afin de minimiser l'encombrement (Yobas *et al.*, 2008). Sous l'effet d'une onde progressive de contraction ou d'extension se propageant le long du tube flexible, le fluide est entraîné par ce système (figure 1.1). La réponse linéaire à ce forçage n'induit pas d'écoulement moyen mais uniquement une oscillation des particules au cours du temps. Pour décrire le transport du fluide, il faut prendre en compte les effets non-linéaires associés à ce mécanisme. Il apparaît alors une dérive des particules au cours du temps et la génération d'une vitesse moyenne non nulle. Cette méthode est particulièrement utile lorsque

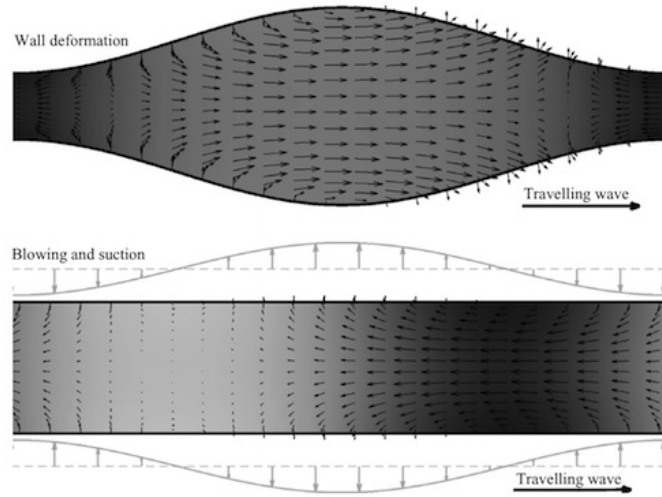


FIGURE 1.1 – Vitesse et champ de pression induits par pompage péristaltique et par injection/aspiration de fluide. Le champ de pression est représenté par les niveaux de gris (faibles pressions en noir) et les flèches indiquent le champ des vitesses (extrait de [Hoepffner & Fukagata \(2009\)](#)).

le fluide à transporter ne doit pas être contaminé par l’environnement extérieur car le système de transport ne rentre jamais en contact avec le fluide qui reste confiné dans le tube flexible.

L’introduction d’un forçage harmonique dans un système est parfois nécessaire pour certaines applications : par exemple, l’introduction d’une variation de pression ou de vitesse dans un système microfluidique permet de générer des émulsions dans des systèmes à faibles tensions de surface comme illustré sur la figure 1.2 ([Ziemecka *et al.*, 2011](#); [Sauter & Shum, 2012a,b](#); [Sauter *et al.*, 2012b](#)).

Mais, la présence d’un forçage harmonique sur un système peut parfois être indésirable et avoir des conséquences importantes. C’est par exemple le cas dans le domaine de la balistique. Une méthode utilisée pour stabiliser la trajectoire d’objets volants, comme des missiles ou des satellites, consiste à leur donner un mouvement de rotation propre. La présence d’une petite perturbation peut alors conduire le carburant liquide contenu dans le réservoir à transiter d’un mouvement de rotation solide à un mouvement de précession. Dans ce cas-là, la dynamique du fluide peut affecter la trajectoire de l’objet et modifier sa stabilité. De nombreuses études ont été effectuées sur la précession dans un corps cylindrique afin de mieux comprendre ces effets ([Stewartson, 1958](#); [Gans, 1970](#); [Herbert, 1986](#); [Manasseh, 1992](#); [Kobine, 1995](#); [Meunier *et al.*, 2008](#); [Lagrange *et al.*, 2008, 2010](#); [Lagrange, 2009](#)).

Ces exemples soulignent l’importance des effets générés par un forçage harmonique, qu’il soit désiré ou non. Il est intéressant de pouvoir prédire la fréquence optimale du forçage à appliquer au système pour induire la formation d’émulsions. De même, estimer le débit induit par pom-

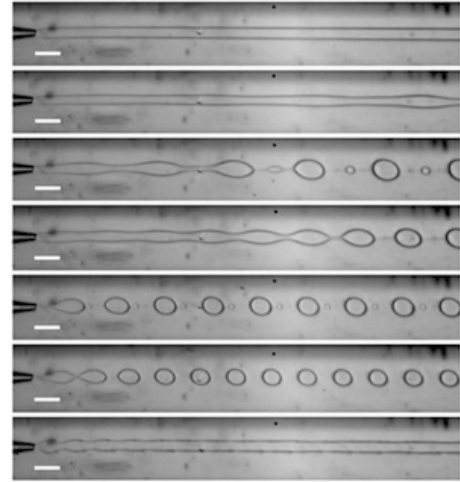


FIGURE 1.2 – Régimes d’écoulements dans un système microfluidique. De haut en bas, la fréquence du forçage harmonique augmente. Contrôler les effets générés par le forçage permet la génération d’émulsions.

page péristaltique nécessite de connaître les caractéristiques de l'écoulement généré. Alors que dans le cas de la précession d'un objet volant, il est nécessaire de savoir quand va intervenir une instabilité de précession et ses effets sur la stabilité du vol.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés au cas particulier d'*un forçage harmonique sur un écoulement en rotation*. En effet, la présence de la force de Coriolis induite par la rotation apporte une dynamique supplémentaire, riche et intéressante. De plus, les écoulements en rotation ont pour applications directes les écoulements géophysiques et astrophysiques où la dynamique interne des planètes et satellites est source de nombreuses interrogations.

1.1.2 Géophysique et astrophysique

Les planètes et les satellites tournent sur eux-mêmes à une vitesse angulaire donnée. Par exemple, pour la Terre, cette rotation se fait en un jour. D'autres effets mécaniques¹ s'ajoutent à cette rotation propre : les forces de marées, un mouvement de précession et de libration longitudinale/latitudinale. Ces effets qui s'exercent sur l'écoulement en rotation constituent des forçages harmoniques en temps et en espace. Leur modélisation mathématique sera présentée en section 1.3. On peut alors légitimement se demander si ces forçages peuvent modifier, de manière non-négligeable, la dynamique interne du fluide.

Les modèles actuels d'écoulements dans les planètes et satellites qui permettent d'expliquer, par exemple, la présence de bandes visibles à la surface de Jupiter, sont principalement basés sur de la convection (Busse, 1976; Aurnou & Olson, 2001) ou de la turbulence en milieu stratifié (Williams, 1979). De même, la présence d'un champ magnétique sur notre Terre et dans certaines planètes et satellites du système solaire est généralement considérée comme induite par des phénomènes convectifs (Glatzmaier & Roberts, 1995a,b; Grote *et al.*, 2000; Busse, 2002). Nous proposons d'étudier dans cette thèse des mécanismes alternatifs de forçages mécaniques tels que la précession, la libration ou les déformations de marées qui sont susceptibles d'apporter une contribution non-négligeable aux écoulements planétaires (voir par exemple Malkus, 1968; Tilgner, 2007; Morize *et al.*, 2010). De plus, les grandeurs physiques caractérisant certains satellites tels que Io, Ganymède ou la Lune primitive, ne permettent pas d'expliquer toutes les observations à l'aide de la convection planétaire. Le champ magnétique observé ne peut s'expliquer que par la présence de mécanismes alternatifs. Plusieurs études ont ainsi montré que la présence d'un forçage de précession, de marées ou de libration peut générer des effets importants, comme par exemple la génération d'un champ magnétique (Malkus, 1993; Kerswell & Malkus, 1998; Tilgner, 1999b, 2005; Herreman *et al.*, 2009; Le Bars *et al.*, 2011; Nore *et al.*, 2011b, 2012; Cébron *et al.*, 2012a; Wu & Robert, 2012) ou la synchronisation des étoiles binaires (Le Bars *et al.*, 2010).

Depuis quelques années, un fort regain d'intérêt est observé dans l'étude des forçages harmoniques en astrophysique, en particulier le forçage de libration. En effet, en construisant un modèle hypothétique d'un corps astrophysique (composition, présences de différentes couches solides ou fluides) et en étudiant ensuite la réponse de ce corps à un forçage harmonique, on peut estimer sa structure interne la plus probable. Une précision de plus en plus grande dans les mesures astrophysiques a permis de révéler, entre autres, la présence d'un noyau liquide au sein de Mercure (Margot *et al.*, 2007), d'océans internes ou de vents zonaux (Lorenz *et al.*, 2008) ou la variation de la durée du jour sur Titan (Van Hoolst *et al.*, 2009). Plus récemment, l'étude de

1. Les forçages que nous considérons dans cette thèse sont purement mécaniques. L'influence des effets thermiques ou magnétiques n'est pas étudiée.

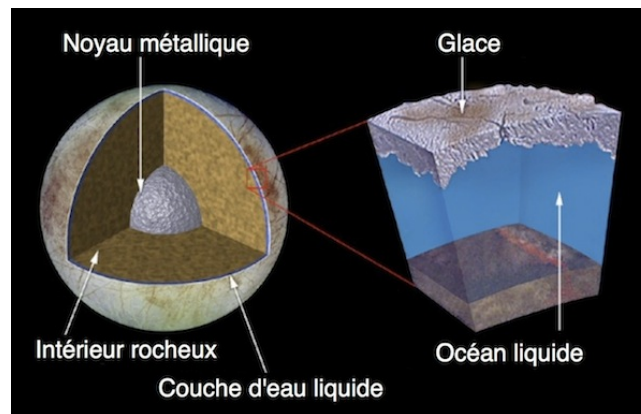


FIGURE 1.3 – Structure interne hypothétique du satellite galiléen Europa. Sous une coquille de glace en surface, on suspecte la présence d’un océan liquide dont les propriétés, telles que sa profondeur, sont mal connues (crédit NASA/JPL).

libration des satellites de glace Joviens a permis de proposer des modèles pour estimer l’épaisseur des océans subsurfaciques sous la croûte de glace (Spohn & Schubert, 2003; Van Hoolst *et al.*, 2008; Rambaux *et al.*, 2011) (figure 1.3). De plus, un projet de mission spatiale d’exploration autour de Jupiter, l’*Europa Jupiter System Mission*² (EJSM), est actuellement en cours et le lancement des sondes de mesures est prévu pour 2020. Ce programme a pour but d’étudier plus en détails les quatre plus grands satellites de Jupiter : Europe, Io, Ganymède et Callisto et de déterminer si ces satellites galiléens³ peuvent abriter un environnement habitable. Scientifiquement, cela nécessite de caractériser notamment la composition en surface de ces satellites, mais aussi de déterminer plus précisément leur structure interne.

Une meilleure caractérisation de la présence et de la taille des océans internes est particulièrement intéressante car de récentes recherches suggèrent, par exemple, que la valeur importante du bilan thermique d’Encelade (figure 1.4) ainsi que les panaches thermiques observés sont dus à la présence d’un océan subsurfacique possédant une activité thermique intense (Hand *et al.*, 2011; Howett *et al.*, 2011; Matson *et al.*, 2012). La même problématique se pose pour de nombreux satellites de glace (voir par exemple Gaeman *et al.*, 2012) : la présence d’un océan subsurfacique est nécessaire afin d’expliquer les observations thermiques ou magnétiques. Surprenons-nous à rêver : différentes études suggèrent que la présence d’eau sous la couche de glace pourrait abriter des traces de vie (E. J. Gaidos, 1999; Kargel *et al.*, 2000; Rothschild & Mancinelli, 2001). Les futures missions spatiales, couplées à des modélisations pertinentes permettront peut-être de déceler des traces de vie sur ces satellites de glace.



FIGURE 1.4 – Le satellite Encelade photographié par la sonde Cassini (crédit JPL/NASA).

Néanmoins, il faut noter qu’à l’heure actuelle, même les modèles les plus avancés, ne prennent pas ou peu en compte les influences du fluide interne. Un des défis majeurs est donc de pouvoir décrire le mouvement de ce fluide sous l’effet de différents forçages harmoniques afin de l’inclure

2. <http://opfm.jpl.nasa.gov/europa-jupitersystemmission/ejasm/>

3. Le terme *satellites galiléens* renvoi uniquement aux quatre plus grands des satellites naturels de Jupiter découverts par Galilée : Io, Europe, Ganymède et Callisto.

dans les modélisations. Par exemple, est-ce que des instabilités générées par un forçage peuvent modifier la dissipation visqueuse au sein de la planète ou le couple exercé sur ses parois ? Plus les effets hydrodynamiques inclus dans les modèles astrophysiques seront bien décrits, plus l'estimation finale de la structure interne d'un satellite à partir d'observations astrophysiques sera précise.

Nous reviendrons plus en détails dans la suite sur la modélisation mathématique des différents types de forçages, ainsi que sur les ordres de grandeur correspondants.

1.2 Quelques notions sur les fluides tournants

Avant de nous lancer dans notre étude, nous rappelons dans cette section quelques notions théoriques de la dynamique des fluides tournants. Cette section n'a pas pour but d'être exhaustive, elle permet simplement de rappeler les principales notions que l'on utilisera dans la suite de ce mémoire. Une introduction plus complète à la dynamique des fluides tournants et des écoulements géophysiques peut être trouvée dans de nombreux ouvrages tels que les livres de Chandrasekhar (1961), de Greenspan (1968), de Pedlosky (1987), ou encore de Cushman-Roisin & Beckers (2010).

1.2.1 Équation de Navier-Stokes en référentiel non-galiléen

Considérons un fluide newtonien, incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν . L'évolution du champ des vitesses $\mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t)$ et de pression P dans un référentiel galiléen (le repère inertiel est spécifié par l'indice "i") est régie par l'équation de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_i, \quad (1.1)$$

et par l'équation de continuité

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0. \quad (1.2)$$

Il est généralement plus pratique d'étudier des écoulements tournants dans le référentiel en rotation avec le fluide. Considérons alors \mathcal{R}_r , ce référentiel en rotation, avec la vitesse angulaire instantanée $\boldsymbol{\Omega}(t)$ par rapport au référentiel inertiel, noté \mathcal{R}_i . L'accélération d'une particule de fluide dans ce référentiel en rotation, non-galiléen, est reliée à l'accélération dans le référentiel inertiel par la relation :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}_i} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}_r} + \underbrace{2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}}_{-\mathbf{f}_c} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}_{-\mathbf{f}_e} + \underbrace{\left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_i} \times \mathbf{r}}_{-\mathbf{f}_p} \quad (1.3)$$

où \mathbf{r} représente le vecteur position et \mathbf{u} la vitesse du fluide dans le référentiel en rotation. En plus de la dérivée usuelle, on voit apparaître des termes supplémentaires propres à la dynamique en référentiel non-galiléen :

- $\mathbf{f}_c = -2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ représente la force de Coriolis et est normale au mouvement des particules de fluide ;
- \mathbf{f}_e correspond à la force centrifuge. Ce terme est potentiel, il peut se réécrire $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = -\nabla(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2/2$;
- $\mathbf{f}_p = -(d_t \boldsymbol{\Omega})_{\mathcal{R}_i} \times \mathbf{r}$ désigne la force de Poincaré. Ce terme n'est présent que dans un référentiel en rotation non uniforme.

L'équation (1.1) se réécrit dans le référentiel en rotation \mathcal{R}_r :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}, \quad (1.4)$$

où on a défini la pression réduite :

$$p = \frac{P}{\rho} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 \quad (1.5)$$

On peut remarquer que seuls les termes d'accélération de Coriolis et de Poincaré apparaissent explicitement dans l'équation de Navier-Stokes en référentiel tournant. En effet, les effets centrifuges peuvent être intégrés à la pression et ne modifieront pas la dynamique du fluide.

1.2.2 Adimensionnement

La dynamique d'un système physique dépend généralement de différents paramètres tels que la vitesse du fluide, sa viscosité, les dimensions du conteneur. Néanmoins, nous pouvons utiliser des nombres sans dimension pour décrire ce problème. Pour un fluide en rotation dans un conteneur de dimension caractéristique R à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$, où Ω est considéré comme constant, nous pouvons utiliser respectivement R , Ω^{-1} et U comme échelles caractéristiques de longueur, de temps et de vitesse d'une particule de fluide. L'échelle de pression est posée comme $\rho \Omega R U$. L'équation (1.4) se met alors sous forme adimensionnée :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + R_0 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2 \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\nabla \pi + E \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.6)$$

Notons que la force de Poincaré a disparu de cette équation car nous considérons un référentiel en rotation à vitesse angulaire constante. Ce choix d'adimensionnement permet de rendre le terme associé à la force de Coriolis d'ordre $O(1)$. Cette expression fait apparaître deux nombres sans dimension. Le nombre de Rossby,

$$R_0 = \frac{U}{R \Omega}, \quad (1.7)$$

qui quantifie l'amplitude du terme de transport convectif de l'équation du mouvement par rapport à l'amplitude de la force de Coriolis. Il donne une estimation de l'importance relative des termes non-linéaires. Le nombre d'Ekman compare l'influence des forces visqueuses et des forces de Coriolis et est défini par

$$E = \frac{\nu}{\Omega R^2}. \quad (1.8)$$

Ce nombre est particulièrement pertinent dans l'étude des écoulements forcés par des effets de parois. Dans le cadre de l'étude des écoulements géophysiques, les effets de rotation et de la force de Coriolis sont dominants. Par conséquent, on se placera dans la suite dans le cas des écoulements à faibles nombres d'Ekman $E \ll 1$ et de Rossby, $R_0 \ll 1$. Typiquement, pour des écoulements planétaires, $E < 10^{-12}$ et la condition $E \ll 1$ est donc amplement satisfaite.

1.2.3 Rotation solide et théorème de Taylor-Proudman

On peut remarquer dans un premier temps que dans le cas d'un vecteur rotation $\boldsymbol{\Omega}$ indépendant du temps, l'équation (1.6) admet une solution triviale $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ et $p = C^{te}$. Dans le référentiel inertiel, cette solution n'est pas triviale et représente un écoulement de rotation solide qui s'écrit simplement $\mathbf{u}_i = \mathbf{k} \times \mathbf{r}$. Ce résultat est naturel, un fluide visqueux remplissant un conteneur fermé qui est mis en rotation uniforme va atteindre au bout d'un temps suffisamment long un état stationnaire de rotation solide.

Considérons le cas simple d'un écoulement à petit nombre de Rossby, $R_0 \ll 1$, stationnaire, $\partial_t \mathbf{u} = 0$ et non visqueux, $E = 0$. Dans ce cas, l'équation de Navier-Stokes (1.6) se réduit à

$$2\mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\nabla\pi \quad (1.9)$$

Notons que cette relation implique que l'écoulement est normal au gradient de pression, i.e. que les lignes de courant et les isobares sont confondues. En prenant ensuite le rotationnel de l'expression (1.9), et en utilisant l'équation de continuité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, on obtient le *théorème de Taylor-Proudman*⁴ (Proudman, 1916; Taylor, 1917, 1923)

$$(\mathbf{k} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0. \quad (1.10)$$

Dans le cas où l'axe de rotation est suivant \mathbf{e}_z , cette condition s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0, \quad \text{d'où} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y). \quad (1.11)$$

Ce théorème implique qu'une colonne de fluide en rotation contenue entre deux parois solides doit avoir la même vitesse sur toute sa hauteur. Si on perturbe l'écoulement en un point donné, cette perturbation va se transmettre instantanément sur toute la colonne. Ceci ne signifie pas qu'aucun écoulement axial n'est créé mais seulement que les trois composantes du champ des vitesses dépendent uniquement de deux composantes. Notons qu'en l'absence de rotation, le mouvement d'un solide dans un fluide perturbe l'écoulement dans toutes les directions. Ce théorème est particulièrement important dans les mouvements atmosphériques et océaniques car les topographies génèrent des perturbations sous forme de colonnes qui interfèrent avec l'écoulement jusqu'à des hauteurs importantes⁵.

1.2.4 Ondes inertielles

Nous considérons un fluide homogène en rotation uniforme autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire $\Omega \mathbf{e}_z$. Ce fluide en rotation est le support de la propagation d'ondes, appelées *ondes inertielles*, induites par la présence de la force de Coriolis (Greenspan, 1968; Lighthill, 1978). Ces ondes inertielles sont présentes dans les écoulements planétaires (Aldridge & Lumb, 1987; Kuhn *et al.*, 2000), dans ce cas, les effets de la rotation sont en plus couplés à des effets de stratification. Expérimentalement, les ondes inertielles peuvent être observées, par exemple en faisant osciller un cylindre dans un écoulement en rotation comme illustré sur la figure 1.6 (Messio *et al.*, 2008; Cortet *et al.*, 2010), en



FIGURE 1.5 – Un objet en se déplaçant dans un écoulement en rotation génère une colonne de fluide parallèle à l'axe de rotation (Bush *et al.*, 1995).

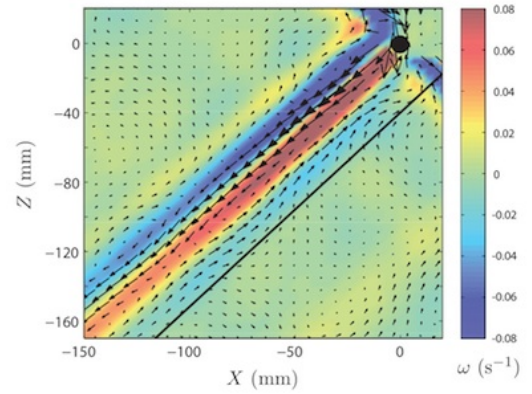


FIGURE 1.6 – Visualisation expérimentale du champ de vitesses (flèches) et de vorticité ( chelle de couleurs) de l'onde inertielle générée par l'ocillation d'un cylindre. (extrait de Cortet *et al.* (2010)).

4. Bien que ce résultat ait été établi dans un premier temps par Hough (1897)

5. Notons qu'en pratique, pour les applications atmosphériques et océaniques, la stratification a également une influence.

présence de coins (Wood, 1965, 1966) ou de discontinuités dans les conditions aux limites (Walton, 1975). Notons également le travail de Tilgner (2000) qui a montré que les enveloppes de paquets d'ondes inertielles localisées dans l'espace se traduisent par des couches de cisaillement.

Plaçons nous dans la limite des petits nombres d'Ekman, $E \ll 1$ et de Rossby, $Ro \ll 1$. L'équation (1.6) conduit alors à

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla p \quad (1.12)$$

où \mathbf{e}_z indique la direction de l'axe de rotation. En prenant deux fois le rotationnel de cette expression, on obtient avec l'équation de continuité :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \mathbf{u} + 4 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} = 0 \quad (1.13)$$

Les solutions de cette équation forment une famille orthogonale appelée ondes inertielles. On cherche ses solutions sous la forme

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (1.14)$$

où \mathbf{k} et ω représentent respectivement le vecteur d'onde et la pulsation de l'onde. Ceci conduit à la relation de dispersion des ondes inertielles :

$$\omega = \pm 2 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_z}{k} = \pm 2 \cos \gamma \quad (1.15)$$

où on a défini γ , angle entre \mathbf{k} et \mathbf{e}_z . Nous remarquons que la direction de propagation de l'onde dépend de sa pulsation. Les ondes inertielles sont donc *anisotropes*. Une équation similaire peut être obtenue pour le champ de pression :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 p + 4 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (1.16)$$

qui est connue sous le nom d'équation de Poincaré. Cherchons alors un champ de pression proportionnel à $e^{-i\omega t}$. L'équation précédente peut se réécrire :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2 - 4}{\omega^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (1.17)$$

Cette équation permet de voir explicitement, que selon le signe du terme $(\omega^2 - 4)/(\omega^2)$, la nature du problème va être différente. Pour $\omega^2 < 4$, le problème est hyperbolique et des ondes inertielles peuvent se propager. A l'inverse, dans le cas où $\omega^2 > 4$, le problème est elliptique et aucune onde inertielle ne se propage. On peut noter à partir de la condition d'incompressibilité que

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.18)$$

Ceci implique que la propagation des ondes inertielles est transverse. On remarque également dans la relation (1.15) que la fréquence ne dépend pas de la longueur d'onde mais uniquement de la direction de propagation de l'onde. La vitesse de phase de l'onde inertielle est, quand à elle, donnée par

$$\mathbf{v}_p = \pm 2 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_z}{k^3} \mathbf{k} = \pm 2 \frac{\cos \gamma}{k^2} \mathbf{k} \quad (1.19)$$

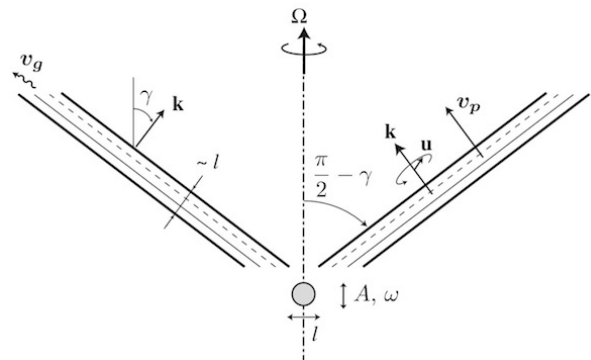


FIGURE 1.7 – Représentation schématique des ondes inertielles émises par un cylindre oscillant (d'après Mesio et al. (2008)).

Cette vitesse de phase dépend de la pulsation ω , la propagation des ondes inertielles est donc *dispersive*. La vitesse de groupe correspond à la vitesse de propagation de l'énergie et a pour expression

$$\mathbf{v}_g = \pm 2 \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{k})}{k^3} \quad (1.20)$$

On remarque que la vitesse de groupe et la vitesse de phase sont perpendiculaires (voir figure 1.7). De plus, la fréquence de forçage imposée ne sélectionne pas de longueur d'onde. Par conséquent, celle-ci est fixée par la géométrie du forçage ou l'échelle de longueur visqueuse du problème.

Pour $\omega = 0$, la relation de dispersion conduit à $\gamma = \pi/2$, ce qui implique une vitesse de phase nulle et une vitesse de groupe $\mathbf{v}_g = \pm 2 k^{-1} \mathbf{e}_z$. Les surfaces caractéristiques sont des cylindres alignés avec l'axe de rotation du fluide. On a alors le long d'un cylindre caractéristique

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0 \quad (1.21)$$

Nous retrouvons le théorème de Taylor-Proudman présenté ci-dessus. Pour de plus amples détails sur les ondes inertielles nous renvoyons au livre de Greenspan (1968) ou à l'article de Messio *et al.* (2008).

1.2.5 Ondes inertielles et ondes internes

Il est intéressant de noter l'analogie possible entre les ondes inertielles et les ondes internes associées à la stratification du milieu de propagation (Veronis, 1970; Rieutord & Noui, 1991). La relation de dispersion des ondes internes s'écrit

$$\omega = \pm N \sin \gamma \quad (1.22)$$

où N est la fréquence de Brunt-Väisälä. Elle correspond à la pulsation propre d'oscillation des particules de fluide soumises à la force de flottaison et est définie par

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}} \quad (1.23)$$

où g est l'accélération de la pesanteur, ρ_0 la moyenne suivant z de la masse volumique ρ . Cette analogie est particulièrement intéressante car les ondes internes ont fait l'objet de nombreuses études, du fait de leur présence dans les systèmes naturels (voir par exemple Garrett & Munk, 1979; Maas *et al.*, 1994; Sutherland *et al.*, 1999; Dauxois & Young, 1999; Staquet & Sommeria, 2002; Voisin, 2003; Helfrich & Melville, 2006; Mercier *et al.*, 2010; Bordes *et al.*, 2012).

Cette analogie sera particulièrement utilisée dans l'étude de la génération spontanée d'ondes inertielles effectuée au chapitre 6.

1.2.6 Modes inertiels dans une sphère

Dans le cas d'une géométrie confinée, les ondes inertielles portent le nom de modes inertiels. Considérons, par exemple, une géométrie que l'on utilisera tout au long de cette thèse : une sphère en rotation (Greenspan, 1968; Zhang *et al.*, 2001). Les mêmes développements peuvent être effectués dans des géométries différentes, telles qu'un cylindre (Kelvin, 1880) ou un sphéroïde (Zhang *et al.*, 2004). Il faut néanmoins noter que dans certaines géométries comme la coquille sphérique ou l'ellipsoïde triaxial, ces modes inertiels ne sont pas connus analytiquement et doivent être calculés numériquement.

Considérons une sphère de rayon R en rotation autour de son axe à la vitesse angulaire $\Omega \mathbf{e}_z$. En coordonnées cylindriques, le champ de base des vitesses s'écrit $\mathbf{u} = r \Omega \mathbf{e}_\theta$ où r est la distance à l'axe de rotation et \mathbf{e}_θ est le vecteur azimutal. Dans la suite, Ω^{-1} et R sont utilisés respectivement comme échelles de temps et de longueur. Perturbons alors le champ des vitesses et de pression par un mode linéaire de nombre azimutal m et de fréquence ω :

$$(\mathbf{u}', p') = (\mathbf{u}, p) e^{i(m\theta - \omega t)} \quad (1.24)$$

Dans le cadre d'une analyse non visqueuse, l'amplitude de la perturbation du champ de pression satisfait à l'équation de Poincaré (Cartan, 1922; Lacaze, 2004).

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} p - \left(\frac{4}{\gamma^2} - 1 \right) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (1.25)$$

De plus, la condition aux limites non visqueuse, déduite de la condition $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$, s'écrit

$$r \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{2m}{\gamma} p - \left(\frac{4}{\gamma^2} - 1 \right) z \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad r^2 + z^2 = 1. \quad (1.26)$$

où $\gamma = \omega - m$ est la fréquence de la perturbation dans le référentiel en rotation. La solution à ce problème aux valeurs propres a été donnée par Greenspan (1968). Il apparaît que pour une valeur donnée de m , il existe un nombre discret de familles de valeurs propres qui sont définies comme les racines de l'équation

$$(1 - x^2) \frac{d}{dx} \left(P_l^{|m|}(x) \right) + m P_l^{|m|}(x) = 0 \quad \text{avec} \quad x = \frac{\gamma}{2} \quad (1.27)$$

où P_l^m est le polynôme de Legendre de degré l et d'ordre m . Ces familles sont paramétrisées par les entiers l et m . Pour chaque valeur de l et m , il y a $l - m$ valeurs propres si $m \neq 0$ et $l - 1$ valeurs propres si $m = 0$. Cette fonction propre, associée à chaque valeur propre γ est alors donnée par

$$p(r, z) = r^{|m|} z^k \prod_{j=1}^N \left[\zeta_j^2 (\zeta_j^2 - 1) + \zeta_j^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{4} \right) r^2 + \frac{\gamma^2}{4} (1 - \zeta_j^2) z^2 \right] \quad (1.28)$$

où $k = 0$ si $(l - m)$ est paire, et $k = 1$ si $(l - m)$ est impaire. ζ_j , où $j = 1..N$ sont les zéros de P_l^m et l'entier N est donné par

$$N = \frac{1}{2} (l - |m|) \quad \text{quand} \quad l - |m| \quad \text{est paire}$$

$$N = \frac{1}{2} (l - |m| - 1) \quad \text{quand} \quad l - |m| \quad \text{est impaire}$$

On peut déduire de ces équations que les fréquences ω sont confinées dans l'intervalle $m - 2 < \omega < m + 2$. De plus, pour $m = 0$ (cas axisymétrique), le spectre de fréquences est symétrique. On peut alors tracer l'évolution de la fréquence des modes propres de la sphère pour différents nombres azimutaux m . Les figures 1.8(a)-1.8(d) représentent ces modes propres, respectivement pour $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$ et $m = 8$. L'expression 1.28 permet de tracer le champ de pression associé à chaque mode propre. Nous avons représenté sur les figures 1.9(a)-1.9(d) ces champs de pression pour quelques modes propres axisymétriques ($m = 0$).

Nous verrons dans le chapitre 7 comment utiliser ces résonances pour générer des vents zonaux importants.

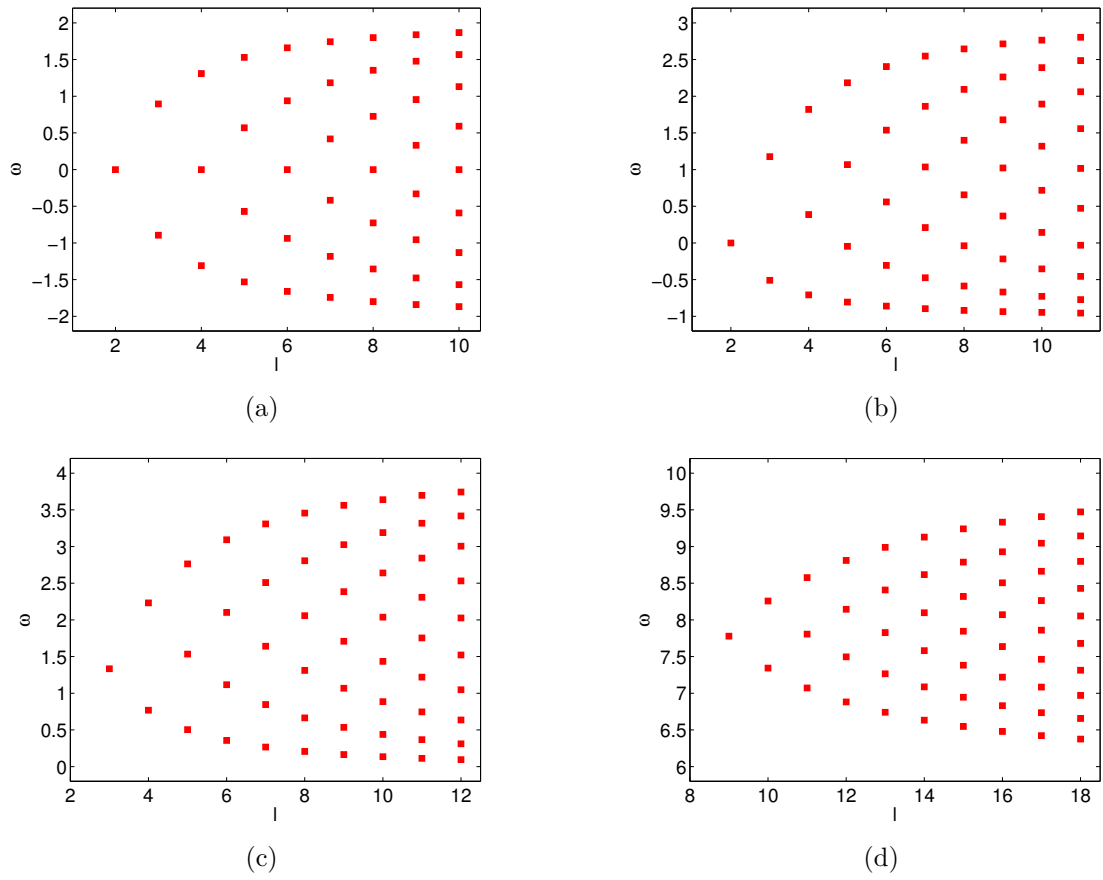


FIGURE 1.8 – Valeurs propres en fonction du degré de polynôme de Legendre pour (a) $m = 0$, (b) $m = 1$, (c) $m = 2$, (d) $m = 8$.

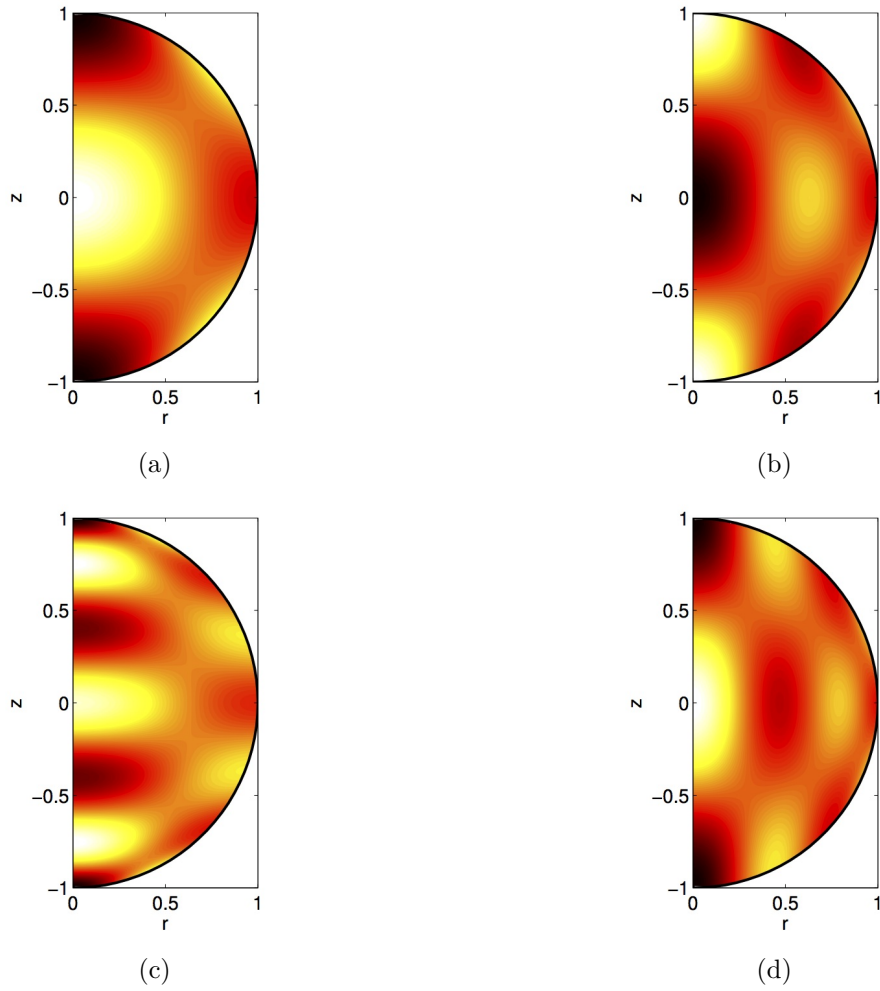


FIGURE 1.9 – Champ de pression associé aux modes propres dans une sphère en rotation soumise à un forçage de libration longitudinale ($m = 0$). Solution analytique pour (a) $\omega = 1,3089$ ($l = 4$), (b) $\omega = 0,9381$ ($l = 6$), (c) $\omega = 1,7995$ ($l = 6$) et (d) $\omega = 0,7262$ ($l = 8$).

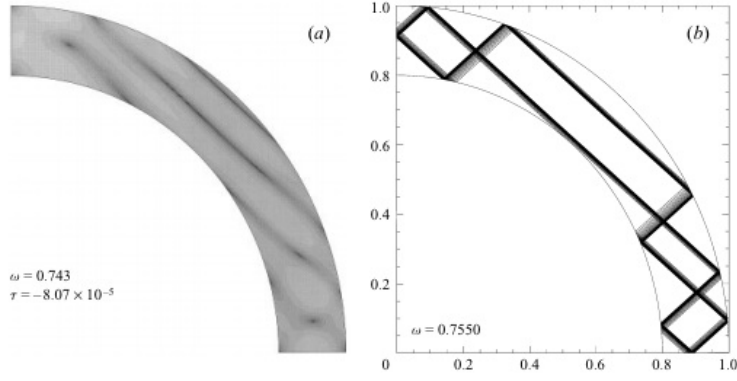


FIGURE 1.10 – (a) Énergie cinétique d'un mode inertiel donnée dans une coquille sphérique et (b) structure des rayons coïncidant avec le maximum de l'énergie cinétique (extrait de [Rieutord & Valdetaro, 1997](#)).

1.2.7 Attrappeurs dans une coquille sphérique

Dans une sphère creuse, les modes propres peuvent être obtenus analytiquement comme nous venons de le voir. En présence d'un noyau interne la situation devient plus complexe. Ainsi, les modes inertiels confinés dans une coquille sphérique ont fait l'objet de nombreuses études ces vingt dernières années ([Rieutord & Valdetaro, 1997](#); [Rieutord *et al.*, 2000, 2001, 2002](#); [Rieutord & Valdetaro, 2010](#); [Tilgner, 1999a](#); [Maas, 2001](#); [Maas & Harlander, 2007](#)). À l'inverse d'une sphère creuse, les modes inertiels sont singuliers dans une coquille sphérique, et il n'existe pas de solution analytique permettant de déterminer l'écoulement généré. À l'aide de simulations numériques linéaires, [Rieutord & Valdetaro \(1997, 2010\)](#) ont étudié la trajectoire des rayons autour desquels se concentrent l'énergie cinétique. Ils ont pu montrer que, dans cette situation, la distribution de l'énergie cinétique n'est pas uniforme dans le volume mais se concentre sur des surfaces coniques possédant une épaisseur variant comme $E^{1/4}$ (figure 1.10). Nous renvoyons au différents articles mentionnés ci-dessus pour plus de détails. Notons que cette notion d'attrappeurs se retrouve également dans le cas des ondes internes en milieu confiné (voir par exemple [Maas & Lam, 1995](#); [Swart *et al.*, 2010](#)).

1.2.8 Couches visqueuses dans les écoulements en rotation

1.2.8.1 Couches d'Ekman

Considérons un écoulement en rotation dans un conteneur à faible nombre d'Ekman, $E \ll 1$. En l'absence de zones de cisaillement dans le volume, induites par exemple par la présence d'ondes inertielles, on peut négliger l'influence de la viscosité dans le volume. On se place alors dans le cadre de la théorie des couches limites. L'écoulement se décompose suivant un écoulement non visqueux dans le volume où le nombre d'Ekman est pris nul, $E = 0$, et un écoulement dans des couches limites où les effets de viscosité sont pris en compte. L'équilibre entre la force de Coriolis et la force visqueuse donne la taille caractéristique de ces couches $\delta_E \sim E^{1/2}$. Plus précisément, on peut écrire

$$\delta = \sqrt{\frac{2E}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z}} \quad (1.29)$$

où \mathbf{n} désigne la normale à la paroi et \mathbf{e}_z est l'axe de rotation. Au sein de ces couches, un phénomène de pompage opère : du fluide y est aspiré ou rejeté vers le volume, ce phénomène est appelé le pompage d'Ekman. La vitesse normale à la paroi s'écrit alors (Greenspan, 1968)

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \frac{E^{1/2}}{2} \mathbf{n} \cdot \nabla \times \left[\frac{\mathbf{n} \times \mathbf{u} + \mathbf{u}}{\sqrt{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z|}} \right] \quad (1.30)$$

Nous pouvons voir que, bien que les couches d'Ekman soient localisées aux voisinages des parois solides, l'écoulement dans le volume est modifié par ce pompage qui génère un écoulement secondaire d'ordre \sqrt{E} . De plus, cette solution peut devenir singulière pour certaines latitudes. Il en résulte une éruption de couche limite qui se traduit dans le volume par la présence d'une couche de cisaillement (Kerswell, 1995; Hollerbach & Kerswell, 1995).

1.2.8.2 Latitudes critiques

L'épaisseur de la couche d'Ekman traduit l'équilibre entre la force de Coriolis et la force visqueuse. Néanmoins si on introduit une perturbation à la fréquence ω , une couche de cisaillement va être créée à la latitude critique θ_c qui vérifie $\omega = 2 \cos \theta_c$. Localement, l'épaisseur de la couche d'Ekman va varier et peut prendre différentes échelles en fonction de la position de cette latitude. La solution analytique usuellement obtenue au voisinage de cette zone n'est alors plus valide. Il faut introduire de nouvelles échelles radiale et orthoradiale qui modifient les équations dans la couche limite. Cette latitude critique est à l'origine de la divergence de la solution analytique pour l'écoulement zonal dans le cas de la précession (Busse, 1968b), d'une déformation de marées (Suess, 1971) ou d'un forçage de libration (Busse, 2010a). Simultanément à cette thèse, le cas d'une sphère en précession a été étudié par Kida (2011). Nous reviendrons sur les échelles et équations gouvernant la dynamique du fluide au voisinage de ces latitudes critiques dans le chapitre 8.

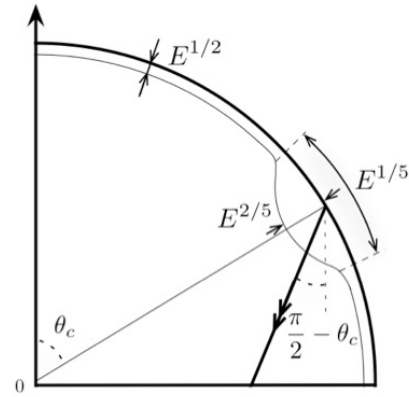


FIGURE 1.11 – Représentation schématique des différentes échelles en présence d'une latitude critique. La couche d'Ekman diverge au voisinage de θ_c .

1.2.8.3 Couches de Stewartson

En plus des modes inertiels et de la couche d'Ekman, des couches de cisaillement internes, parallèles à l'axe de rotation peuvent apparaître dans un fluide en rotation rapide. La nécessité d'introduire des couches visqueuses dans le volume a été mentionnée par Proudman (1956) lors de son étude théorique de l'écoulement entre deux sphères concentriques en rotation à des vitesses angulaires différentes. Dans ce cas l'écoulement dans le cylindre tangent à la sphère interne est différent de l'écoulement hors de ce

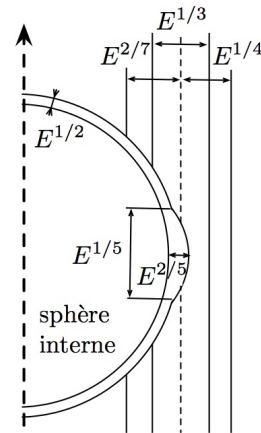


FIGURE 1.12 – Schéma des couches de Stewartson tangentes à la sphère interne (adapté de Stewartson, 1966).

cylindre tangent et une discontinuité de vitesse apparaît. [Stewartson \(1957\)](#) a dans un premier temps résolu la structure de ces couches de cisaillement en géométrie cylindrique. Puis en considérant la même situation que [Proudman \(1956\)](#), il a développé une étude analytique mettant en évidence la présence de différentes couches, d'épaisseur respectives $E^{1/4}$, $E^{2/7}$ et $E^{1/3}$ au niveau du cylindre tangent à la sphère interne ([Stewartson, 1966](#)) (voir figure 1.12).

Nous montrerons au chapitre 3 que la même structure se retrouve dans une sphère, en présence d'un noyau interne, soumise à un forçage de libration longitudinale. Bien que dans ce cas-là les deux sphères concentriques peuvent posséder la même vitesse angulaire, l'écoulement non-linéaire généré est différent de part et d'autre du cylindre tangent à la sphère interne. Il en résulte une succession de couches visqueuses similaire à la situation étudiée par [Stewartson \(1966\)](#).

1.3 Modélisation des forçages mécaniques sur un fluide en rotation

Les planètes et satellites, en plus de leur rotation propre, sont soumis à différentes perturbations mécaniques qui peuvent avoir des conséquences non négligeables dans leurs couches fluides. Ces forçages, s'ils sont réguliers, sont appelés forçages harmoniques et peuvent être classifiés en trois grands types : le *forçage de libration* qui correspond à une oscillation des axes d'inertie de la planète autour de son axe de rotation moyen, le *forçage de précession* où l'axe de rotation propre de la planète change au cours du temps et le *forçage de marées* qui entraîne une déformation d'ensemble de toutes les enveloppes des planètes.

Il est impossible de reproduire au laboratoire les mêmes caractéristiques que le fluide ou la forme de la planète. Pour simplifier ce problème, nous considérons dans toute la suite, un fluide incompressible, newtonien de viscosité cinématique ν . Le conteneur est non rugueux, aucune topographie de petite échelle n'est prise en compte. Seule la forme globale de la planète est décrite : une sphère creuse. Selon les cas, nous pourrions complexifier la situation en y ajoutant un noyau interne ou en déformant la paroi extérieure pour prendre en compte l'effet de l'aplatissement ou des marées. Ces hypothèses, qui peuvent paraître assez grossières, sont nécessaires pour réaliser un modèle *fluide* de planètes. Nous pensons qu'elles sont également suffisantes pour appréhender les effets principaux des forçages mentionnés ci-dessus.

1.3.1 Librations

Considérons un satellite tournant autour de son axe à la vitesse angulaire Ω_{spin} . Ce satellite est également en orbite autour d'une planète à la vitesse angulaire Ω_{orb} . Si $\Omega_{spin} = \Omega_{orb}$, le satellite est dit synchronisé, c'est par exemple le cas de la Lune où $\Omega_{spin} = \Omega_{orb} = 27.3$ d. Un observateur sur Terre regardant la Lune durant plusieurs jours devrait toujours voir, du fait de cette synchronisation, le même hémisphère représentant uniquement 50 % de la Lune au cours du temps. Hors, comme l'illustre la figure (1.13), un observateur perçoit de faibles oscillations de la Lune (illustré par exemple par la flèche rouge pointant sur la "Mare Crisium") et peut ainsi voir 59 % de la surface lunaire. Ces faibles oscillations sont appelées *librations*. Ces librations se décomposent en une oscillation Nord/Sud, la *libration latitudinale* et une oscillation Est/Ouest, la *libration longitudinale* (voir figure 1.14).

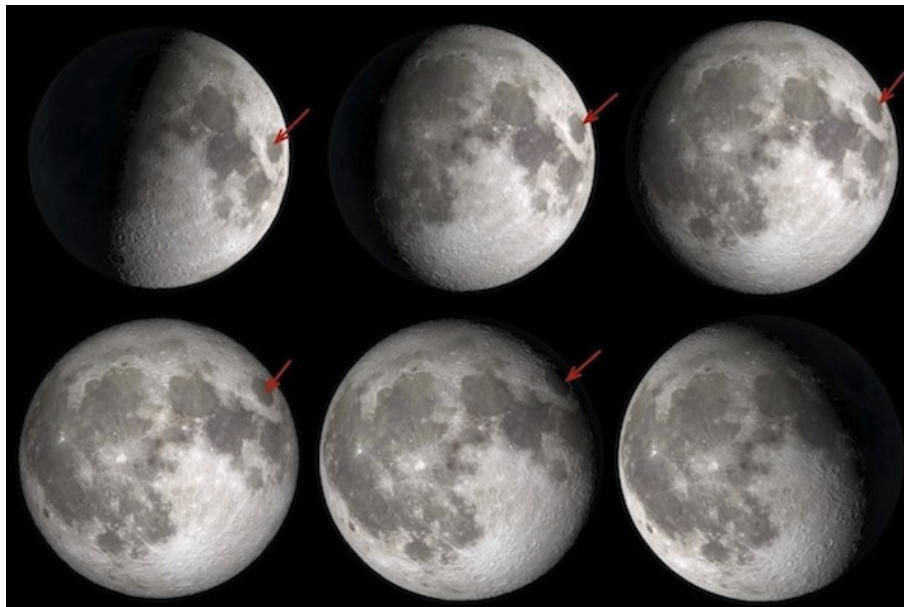


FIGURE 1.13 – [Images successives de la Lune à deux jours d'intervalle] De gauche à droite et de haut en bas, images successives de la Lune à deux jours d'intervalle. La première image a été prise le 1 février 2012. La flèche rouge indique la position d'un point de référence arbitraire : la "Mare Crisium" (Crédits : NASA/JPL).

Ce phénomène de libration regroupe deux phénomènes : la *libration physique* (ou *libration réelle*) dont l'origine est purement physique, liée aux oscillations de l'axe de rotation et une *libration optique* d'origine géométrique, liée aux positions respectives de la Lune et de l'observateur du fait de la vitesse variable de la Lune sur son orbite. Dans ce mémoire nous nous intéressons à la libration physique qui est susceptible de modifier l'écoulement au sein de l'astre.

La libration physique, à laquelle nous allons nous intéresser, est causée par des interactions gravitationnelles avec d'autres corps. Pour cela trois conditions doivent être réunies : l'orbite du satellite doit avoir une excentricité non-nulle, sa distribution de masse ne doit pas être homogène et sa vitesse de rotation propre doit être du même ordre de grandeur que sa vitesse orbitale (Murray & Dermott, 1999). Des modifications du moment angulaire atmosphérique peuvent aussi générer des librations physiques (ceci est détaillé par Noir *et al.*, 2009). Dans ces deux cas les librations sont *forcées* et leurs périodes sont liées aux périodes du forçage. Des impacts d'astéroïdes (e.g. Le Bars *et al.*, 2011), peuvent aussi conduire à des librations *libres* où la période de libration est fixée par la fréquence propre de l'axe. Ceci nous montre que différentes fréquences de libration peuvent être trouvées dans des

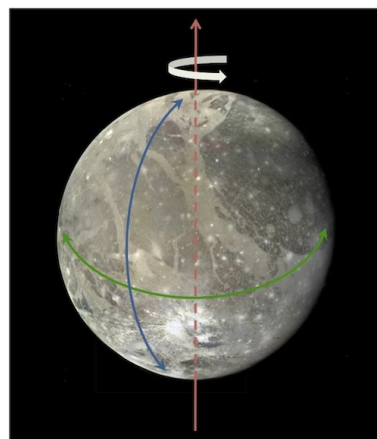


FIGURE 1.14 – Représentation schématique des mouvements de librations en longitude (flèches vertes) et latitude (flèches bleues) de Ganymède. Le satellite tourne autour de son axe (représenté en rouge).

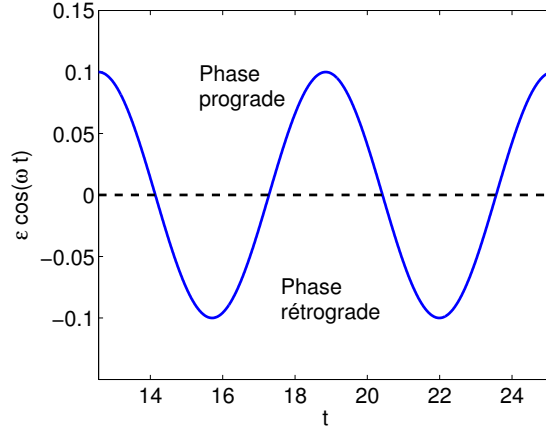


FIGURE 1.15 – Vitesse angulaire d’une sphère dans le référentiel en rotation à la vitesse moyenne soumise à un forçage de libration longitudinale avec $\varepsilon = 0,1$. Les phases progrades correspondent aux valeurs positives et les phases rétrogrades aux valeurs négatives de la vitesse angulaire.

systèmes physiques.

Dans la suite, nous allons séparer le forçage de libration longitudinale et de libration latitudinale. Ceci nous permettra de décrire l’écoulement résultant dans une cavité sphérique ou cylindrique. De plus, comme nous le montrerons dans le chapitre 4, les effets générés par des forçages harmoniques sont génériques ce qui permet d’estimer l’importance des différents forçages.

1.3.1.1 Libration longitudinale

La libration longitudinale représente une variation harmonique de la vitesse de rotation du conteneur. Mathématiquement, on considère un conteneur rempli d’un fluide homogène, incompressible et de viscosité cinématique ν en rotation autour de l’axe \mathbf{k} . Dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, le vecteur rotation instantanée du conteneur s’écrit

$$\mathbf{\Omega}(t) = \left[\Omega_0 + \frac{\delta\Omega}{2} \sin(\omega_{lib} t) \right] \mathbf{k} \quad (1.31)$$

où Ω_0 représente la vitesse angulaire moyenne, $\delta\Omega$ l’amplitude de libration et ω_{lib} la pulsation de libration. Si de plus, on utilise le rayon du conteneur, R , et Ω_0^{-1} respectivement comme échelles de longueur et de temps, on peut réécrire la vitesse angulaire sous forme adimensionnelle :

$$\mathbf{\Omega}(t) = [1 + \epsilon \sin(\omega t)] \mathbf{k} \quad (1.32)$$

où $\epsilon = \delta\Omega/(2\Omega_0)$ et $\omega = \omega_{lib}/\Omega_0$ désignent respectivement l’amplitude et la pulsation de libration adimensionnées.

Dans le référentiel en rotation à la vitesse moyenne de la sphère, la vitesse angulaire varie entre ε et $-\varepsilon$ (figure 1.15). La *phase prograde* correspond au moment où la vitesse angulaire de la sphère est plus grande que sa vitesse angulaire moyenne. A l’opposé, les instants où la sphère tourne moins vite que sa valeur moyenne définissent la *phase rétrograde*.

Dans la suite, nous nous intéressons tout particulièrement aux géométries axisymétriques, par exemple un cylindre, une sphère ou une coquille sphérique, qui sont plus simples à traiter analytiquement et numériquement. Pour de telles géométries et une amplitude de libration $\epsilon \ll 1$ fixée, la dynamique interne du fluide dépend grandement de la valeur de ω/\sqrt{E} . En effet, le temps

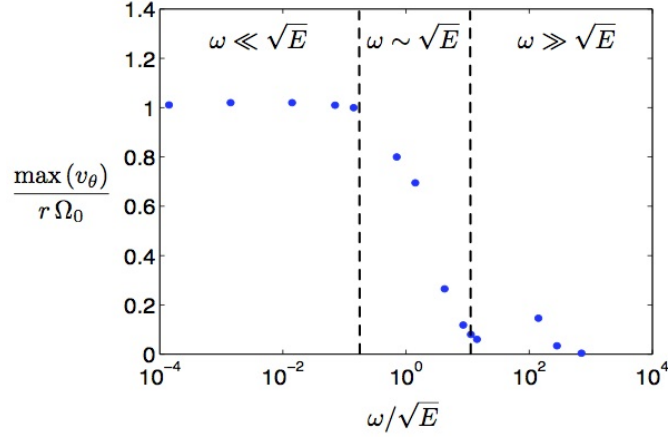


FIGURE 1.16 – Maximum de la vitesse azimutale, $\max(v_\theta)$, au point $(r = 0.5; z = 0)$ dans une sphère, normalisée par la rotation solide en ce point $r\Omega_0$ obtenu par simulation numérique (Paramètres : $E = 5.10^{-5}$, $\epsilon = 0.1$).

caractéristique de spin-up pour mettre en rotation le fluide dans le volume est de l'ordre de \sqrt{E} (Greenspan, 1968; Benton & Clark, 1974; Duck & Foster, 2001). Ainsi, on peut distinguer deux situations en fonction de la valeur de la fréquence de libration ω par rapport à \sqrt{E} :

(a) le cas où la vitesse angulaire de la sphère change de signe avant que le fluide à l'intérieur n'ait été mis en rotation. Ceci se traduit mathématiquement par la condition $\omega \gg \sqrt{E}$. Dans le référentiel en rotation, la composante azimutale du champ des vitesses dans le volume u_ϕ reste quasiment nulle (ceci correspond à partie droite de la figure 1.16 où l'écoulement dans le volume reste proche d'une rotation solide). Les effets de l'oscillation du conteneur restent localisés dans la couche visqueuse d'épaisseur $\delta \sim \sqrt{E}$ proche de la paroi extérieure. Les corrections générées dans le volume sont d'ordre $O(E^{1/2})$ et induisent une oscillation périodique des composantes radiales et orthoradiales u_r et u_θ .

(b) Pour $\omega \sim \sqrt{E}$ ou $\omega \leq \sqrt{E}$ (partie gauche de la figure 1.16), la composante azimutale du champ des vitesses dans le volume dépend du temps ce qui indique que la mise en rotation du fluide a lieu à chaque oscillation.

Notons également sur le diagramme une vitesse non négligeable pour $\omega/\sqrt{E} \sim 10^2$, ce qui correspond à $\omega \simeq 1$. Comme nous le verrons dans la suite, cette vitesse non nulle correspond à la présence d'ondes inertielles directement excitées par le mécanisme de libration longitudinale.

Ce forçage est assez simple à implémenter sur un dispositif expérimental, ainsi différentes études ont été menées. Un des pionniers fut Aldridge (1967) qui, durant sa thèse, a montré expérimentalement que le forçage de libration longitudinale peut exciter des ondes inertielles, et pour des fréquences particulières entrer en résonance pour générer un écoulement plus intense comme illustré sur la figure 1.17(b) (Aldridge & Toomre, 1969; Aldridge, 1972). De plus, son dispositif expérimental lui a permis de faire deux observations importantes :

- (1) la présence d'une instabilité localisée près de la paroi extérieure pour des amplitudes d'excitation suffisamment élevées (figure 1.17(a)). Cette instabilité apparaît sous forme de rouleaux.
- (2) Un écoulement stationnaire de dérive des particules, appelé *écoulement zonal* qui semble varier comme le carré de l'amplitude d'excitation.

En parallèle de cette étude expérimentale, Wang (1970) obtient une expression analytique de l'écoulement zonal dans un cylindre soumis à un forçage de libration longitudinale. Cette prédiction théorique est appuyée par des mesures expérimentales en très bon accord. Il faut attendre

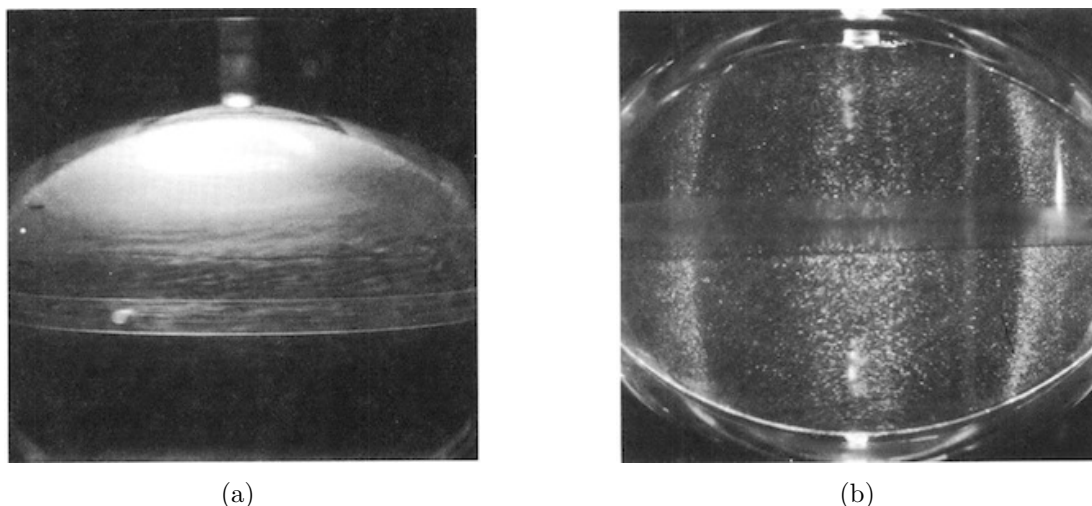


FIGURE 1.17 – (a) Visualisation des rouleaux générés par l'instabilité proche de la paroi (b) Bandes de cisaillement mettant en évidence la résonance d'un mode (extraits de Aldridge (1967)).

ensuite plus de vingt ans pour voir apparaître de nouvelles études sur ce forçage. Rieutord (1991) et Tilgner (1999a) ont confirmé numériquement ces résonances d'ondes inertielles observées par Aldridge. Beaucoup plus récemment, les travaux de Noir *et al.* (2009) se sont intéressés à ce forçage de libration longitudinale du fait de sa présence dans de nombreux corps du système solaire. Noir *et al.* (2009) ont étudié expérimentalement la présence de l'instabilité au voisinage de la paroi extérieure. Ils ont mis en évidence que cette instabilité est d'origine centrifuge et qu'elle est axisymétrique juste au dessus du seuil. Noir *et al.* (2009) ont établi un critère de stabilité en fonction de l'amplitude de libration et du nombre d'Ekman de l'écoulement pour une fréquence de libration $\omega = 1$. Cette étude a été complétée peu après numériquement par Calkins *et al.* (2010) à l'aide d'un code axisymétrique. Cette étude numérique a quantifié plus précisément la présence du vent zonal, toujours pour une fréquence de libration $\omega = 1$. Dans le même laps de temps, Busse (2010a), en utilisant les méthodes développées dans le cas de la précession (Busse, 1968b) a établi une expression analytique du vent zonal dans la limite $\omega \ll 1$. Noir *et al.* (2010) ont également étudié ce forçage dans un cylindre, mesurant expérimentalement via une méthode de LDV l'écoulement zonal généré ainsi que l'apparition de l'instabilité centrifuge dans cette géométrie.

Les travaux, commencés en 2009 et présentés dans ce mémoire, s'inscrivent pleinement dans la "re-découverte" et l'exploration de la dynamique induite par ce forçage. Cette reprise d'activité est directement due aux applications géo/-astrophysiques de ces calculs. Afin d'établir des modèles de la structure interne des satellites Joviens, il est primordial de pouvoir estimer les grandeurs telles que la dissipation ou le couple dans l'océan subsurfacique.

1.3.1.2 Libration latitudinale

Le forçage de libration latitudinale correspond à une oscillation périodique de l'axe de rotation de la sphère, dans le référentiel du manteau, autour de sa position moyenne (voir figure 1.18). Sous forme adimensionnelle, la variation temporelle de l'angle Ψ s'écrit

$$\Psi(t) = \epsilon \cos(\omega t) \quad (1.33)$$

où ϵ and ω représentent l'amplitude et la pulsation du forçage de libration latitudinale. Par conséquent, comme l'axe de rotation est soumis à ce forçage et varie en fonction du temps, la vitesse angulaire instantanée de la sphère s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \cos \Psi(t) \mathbf{e}_z + \sin \Psi(t) \mathbf{e}_x \quad (1.34)$$

où \mathbf{e}_z représente l'axe de rotation en l'absence du forçage et \mathbf{e}_x est un vecteur perpendiculaire à \mathbf{e}_z , fixe dans le référentiel de la paroi.

Dans les cas rencontrés en astrophysique, l'amplitude du forçage de libration latitudinale est faible, i.e., $\epsilon \ll 1$, donc l'expression (1.34) peut se réécrire

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \mathbf{e}_z + \epsilon \cos(\omega t) \mathbf{e}_x \quad (1.35)$$

On peut noter que (1.35) est la même expression que celle utilisée par Chan et al. (2011) ainsi que Zhang et al. (2012). Si nous nous plaçons dans le référentiel inertiel, la condition de non-glissement à appliquer sur la paroi extérieure de la sphère s'écrit pour le champ des vitesses en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) avec les vecteurs unitaires $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$:

$$\mathbf{u}_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ -\epsilon \sin \phi \cos(\omega t) \\ \sin \theta - \epsilon \cos \phi \cos \theta \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Ainsi, la libration latitudinale dans une sphère peut se résumer à un couplage visqueux à la paroi extérieure, tout comme le cas de la libration longitudinale. Une étude analytique similaire à celle que nous présenterons au chapitre 3 peut donc être faite. Les mêmes conclusions sur les lois d'échelles seraient donc obtenues. Afin de ne pas alourdir ce manuscrit, nous n'avons pas présenté ce calcul ici.

1.3.2 Marées

Considérons un système formé d'une planète et d'un satellite, par exemple notre Terre et la Lune. Chacun des deux corps exerce sur l'autre un champ gravitationnel qui génère des forces

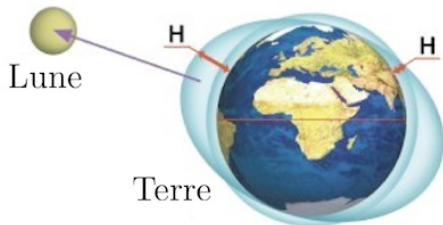


FIGURE 1.19 – Illustration schématique du forçage de marées entre la Terre et la Lune.

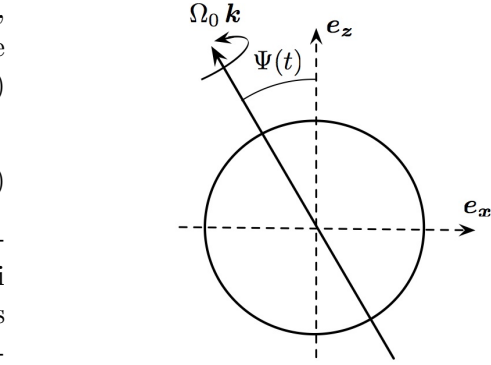


FIGURE 1.18 – Schéma du forçage de libration latitudinale sur une sphère en rotation.

de marées. Ces forces de marées induisent à leur tour une déformation de l'ensemble des couches de la planète comme illustré sur la figure 1.19 ci-contre. Plus précisément, cette déformation est elliptique : une coupe normale à l'axe de rotation est déformée d'un cercle à une ellipse. Cette déformation elliptique est directement visible pour une interaction à deux corps. Néanmoins, la déformation de marées réelle, par exemple sur Ganymède, est en pratique plus complexe qu'une simple déformation elliptique. Sa déformation peut se décomposer comme la somme de différentes déformations multipolaires.

1.3.2.1 Déformation elliptique

Lorsque les parois d'une sphère sont déformées elliptiquement, l'écoulement dans le volume va devenir elliptique. Cet écoulement de base généré par la déformation elliptique, donc de période azimutale $n = 2$, est la superposition d'une rotation solide et d'un écoulement d'étirement. En coordonnées cylindriques cet écoulement peut s'écrire :

$$\mathbf{u} = -\epsilon r \sin(2\theta) \mathbf{u}_r + [r - \epsilon r \cos(2\theta)] \mathbf{u}_\theta \quad (1.37)$$

Les lignes de courant résultantes de ce champ de vitesses sont définies par la fonction de courant

$$\Psi = -\frac{r^2}{2} + \beta \frac{r^2}{2} \cos(2\theta), \quad (1.38)$$

où β est l'ellipticité de ces lignes de courant. Notons que Ψ est reliée à u_r et u_θ par $u_r = \partial_\theta \Psi / r$ et $u_\theta = -\partial_r \Psi$. Cet écoulement, solution des équations de Navier-Stokes, est considéré pour étudier l'instabilité elliptique que nous présenterons dans la suite (voir par exemple Kerswell, 2002; Le Dizès & Eloy, 1999).

Pour générer un écoulement elliptique dans une sphère en rotation, Lacaze *et al.* (2004, 2005) ont utilisé une sphère en rotation déformée elliptiquement avec et sans noyau interne (figure 1.20).

De manière surprenante, de nombreuses études se sont intéressées à cette instabilité, mais une seule étude théorique et expérimentale a été menée sur l'écoulement généré par un forçage de marées dans une gamme de paramètres où cette instabilité n'apparaît pas (Suess, 1970, 1971). Suess a montré que dans le cas d'une déformation fixe dans le référentiel du laboratoire, un écoulement moyen, rétrograde, est généré par ce forçage. Il a noté tout particulièrement la présence d'un écoulement important au voisinage de l'axe de rotation induit par la présence d'une latitude critique. Nous reviendrons sur ses travaux dans la suite.

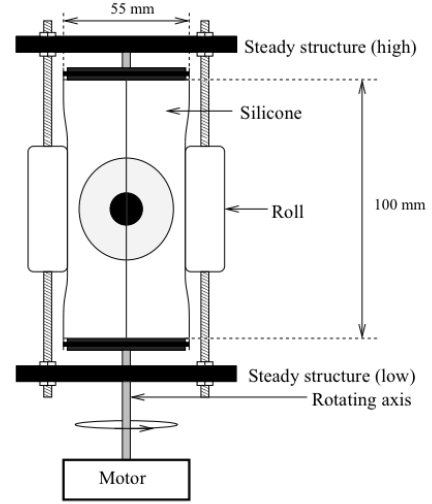


FIGURE 1.20 – Dispositif expérimental utilisé par Lacaze *et al.* (2005) pour étudier l'instabilité elliptique dans une coquille sphérique.

1.3.2.2 Déformation multipolaire

Le forçage le plus naturel pour modéliser une interaction entre un satellite et sa planète est une déformation elliptique. Néanmoins, la présence d'autres satellites peut générer des déformations de nombre azimutal plus élevé, on a alors une *déformation multipolaire*. Cette déformation peut être définie par la fonction de courant :

$$\Psi = -\frac{r^2}{2} + \beta \frac{r^n}{n} \cos(n\theta), \quad (1.39)$$

avec $n \geq 1$. Une fois de plus, l'écoulement est une rotation solide à laquelle on ajoute un écoulement d'élongation multipolaire (Le Dizès & Eloy, 1999). La forme d'une ligne de courant est définie par $\Psi(r, \theta; \beta) = -k$ où k est une constante que l'on peut relier au rayon moyen par $r_{\text{moy}} = \sqrt{2k}$. Cette ligne de courant est caractérisée par une déformation locale définie par

$$\beta_n = \beta \left(\frac{2nk}{n-2} \right)^{(n-2)/2} \quad (1.40)$$

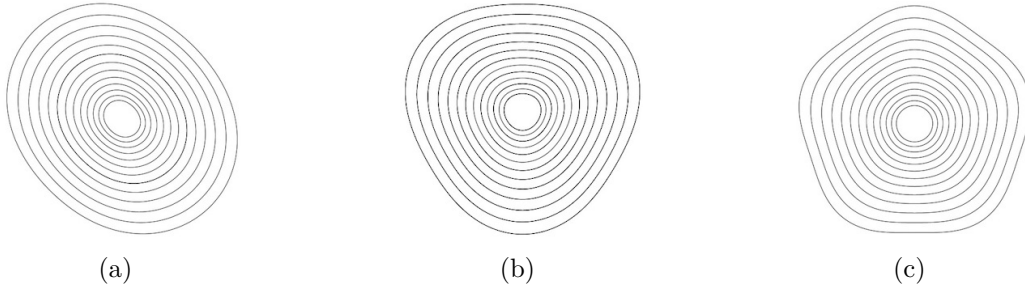


FIGURE 1.21 – Lignes de courant de l’écoulement induit par déformation multipolaire avec $\beta = 0.1$ et r_{moy} variant de 0,45 à 1 pour (a) $n = 2$, (b) $n = 3$ et (c) $n = 5$.

qui mesure l’asymétrie d’une ligne de courant. Les lignes de courant, pour $\beta = 0.1$ et différents nombres azimutaux n sont représentées en figure 1.21. On peut noter que le cas $\beta_n = \beta$ correspond à une simple déformation elliptique, $n = 2$, comme présenté ci-dessus. Dans ce cas, l’excentricité des lignes de courant est constante et égale à $\beta_2 = \beta$. Par contre pour $n \geq 3$, la déformation des lignes de courant n’est plus homogène quand on fait varier la constante k . On remarque que pour des petites valeurs de k , i.e. au voisinage du centre de l’écoulement, les lignes de courant sont quasi-circulaires. Alors que lorsqu’on s’éloigne, i.e. quand $\beta_n \rightarrow 1$, les lignes de courant deviennent de plus en plus déformées et leur excentricité locale est définie par l’expression 1.40. Notons également que pour $\beta_n > 1$ les lignes de courant ne sont plus fermées.

Il est important de noter qu’en pratique le forçage de marées, $n = 2$ n’est qu’un cas particulier du forçage multipolaire. Ainsi, toute déformation d’un satellite sous l’effet d’une planète-mère ou d’autres satellites pourra s’écrire comme la somme de déformations multipolaires de différents nombres azimutaux n . Nous reviendrons sur ce forçage au chapitre 4.

1.3.3 Précession

Un autre type de forçage, que nous n’avons pas étudié directement durant cette thèse, mais qui demeure omniprésent en géo-/astrophysique est le mouvement de précession comme illustré en figure 1.22.

Ce mouvement de précession consiste en une rotation propre du conteneur sur lui-même, notée $\Omega_c \mathbf{k}_c$ à laquelle s’ajoute une rotation de ce vecteur \mathbf{k}_c autour d’un second axe $\Omega_p \mathbf{k}_p$, appelé axe de précession. La dynamique générée par ce forçage est riche et a été l’objet de nombreuses études aussi bien en conteneur cylindrique (Lagrange, 2009) que sphéroïdal (Noir, 2000). Nous rappelons ici brièvement les principaux résultats en géométrie sphéroïdale. Notons que le mouvement de précession a stimulé de nombreuses études de par sa capacité à générer une dynamo (Tilgner, 2005; Nore et al., 2011a, 2012).

Dans le cas d’un conteneur sphéroïdal en précession, Poincaré (1910) a montré que l’écoulement du fluide peut être décrit par une rotation solide autour d’un axe fixe dans le référentiel de précession auquel s’ajoute un écoulement irrotationnel qui assure la non-pénétration du fluide sur les parois extérieures. Néanmoins, cette théorie non-visqueuse ne permet pas de déterminer exactement le vecteur rotation. Ceci requiert l’introduction d’effets visqueux comme l’a démontré analytiquement Busse (1968b) à travers la présence de couches d’Ekman. Il a ainsi pu déterminer précisément cet axe de rotation, qui a ensuite été étudié et confirmé par différentes études expérimentales (Vanyo et al., 1995; Noir et al., 2003) ainsi que numériques (Noir et al., 2001; Lorenzani & Tilgner, 2001).

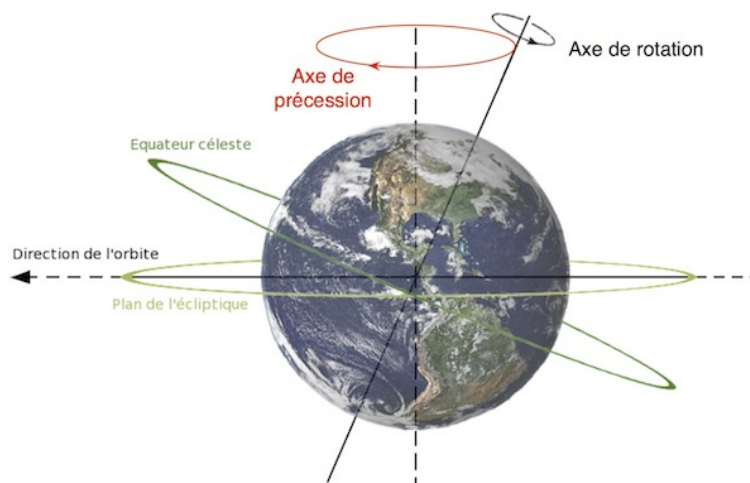


FIGURE 1.22 – Illustration du mouvement de précession de la Terre : son axe de rotation propre est incliné par rapport au plan de l'écliptique qui est perpendiculaire à l'axe de précession.

En plus de cette rotation solide, Malkus (1968) a observé expérimentalement la présence d'un écoulement secondaire. En augmentant la vitesse de précession, il a pu observer trois régimes distincts : un régime d'écoulement géostrophique laminaire à faible vitesse de précession (illustré en figure 1.23(a) par une expérience de Noir (2000)), puis un régime d'écoulement turbulent bidimensionnel suivi d'un régime turbulent développé. Ces différents écoulements ont également pu être observés ultérieurement par Vanyo *et al.* (1995); Noir (2000).

En plus d'une visualisation directe, Malkus (1968) a effectué une mesure quantitative de l'écoulement zonal associé aux structures géostrophiques (figure 1.23(b)). Une ligne de colorant est "tracée" le long d'un rayon de la sphère en précession et une photo est prise toutes les minutes depuis le pôle sud. Ceci permet d'illustrer la dérive moyenne du fluide au cours du temps, ce que l'on appelle le vent zonal. Busse (1968b) a également effectué une analyse faiblement non-linéaire permettant de décrire analytiquement ce vent zonal.

Notons la présence d'un cisaillement intense pour un rayon adimensionné d'environ 0.9. Ce cisaillement, visible également dans la théorie de Busse (1968b) correspond à la présence d'une latitude critique où les lois d'échelles habituelles d'une couche d'Ekman d'épaisseur \sqrt{E} ne tiennent plus. A ces latitudes correspond une *éruption de couche limite* (Kerswell, 1995; Noir, 2000) comme nous allons le voir.

1.4 Instabilités et forçages d'écoulements en rotation

1.4.1 Instabilité centrifuge

Considérons un fluide contenu entre deux cylindres concentriques en rotation à des vitesses angulaires différentes. La rotation différentielle induite est susceptible de déstabiliser l'écoulement, pour certaines valeurs critiques des vitesses de rotation, donnant naissance à des rouleaux axisymétriques, appelés rouleaux de Taylor. Cette instabilité centrifuge a été, dans un premier temps, mise en évidence expérimentalement par Couette (1890) durant sa thèse de doctorat. Lord Rayleigh (1917) a ensuite proposé une étude analytique non-visqueuse afin de décrire le seuil d'apparition de cette instabilité qui a ensuite été redéterminé plus rigoureusement par Synge (1933). Par la suite, Taylor (1923) a étendu cette théorie en montrant que l'effet de la vis-

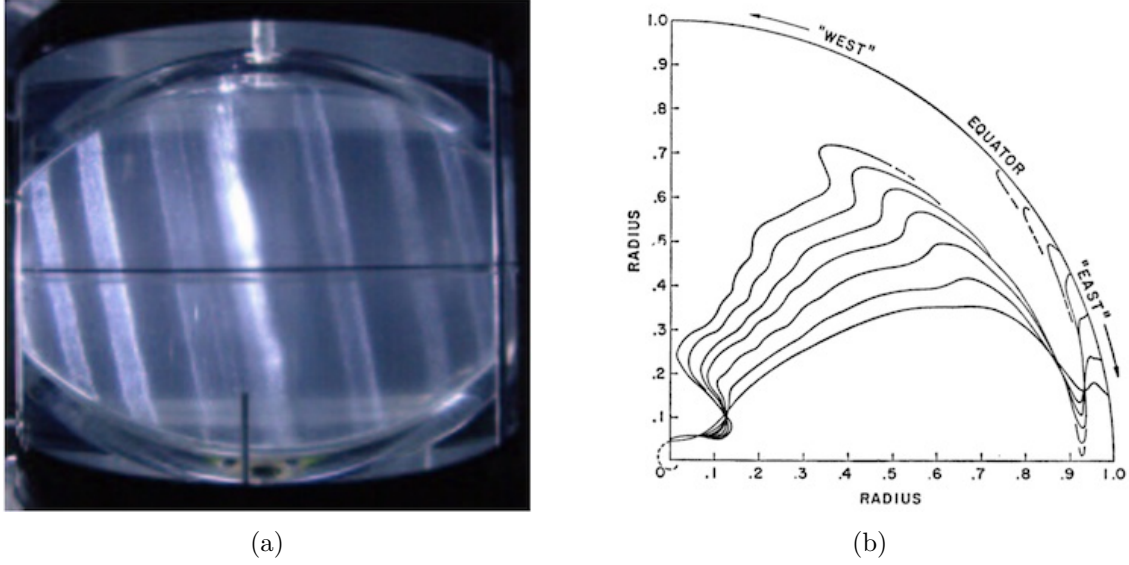


FIGURE 1.23 – (a) Visualisation des cylindres géostrophiques à l'aide de Kalliroscope dans un sphéroïde d'ellipticité 1/25 (extrait de la thèse de [Noir, 2000](#)). (b) Mesure de la dérive de colorants advectionnés par l'écoulement secondaire géostrophique en régime laminaire (extrait de [Malkus, 1968](#)).

cosité est uniquement de retarder l'apparition de l'instabilité centrifuge. De nombreuses études ont suivi cette découverte, notons en particulier le travail d'[Andereck *et al.* \(1986\)](#) qui ont étudié expérimentalement les différentes formes que peuvent prendre cette instabilité centrifuge entre deux cylindres concentriques, comme par exemple une instabilité axisymétrique au voisinage du seuil d'instabilité (figure 1.24(a)) ou une structure plus complexe comme illustrée sur la figure 1.24(b).

L'instabilité centrifuge résulte de la compétition entre une accélération centrifuge induite par la rotation du fluide, $\rho u_\theta^2/r$ et le gradient de pression $\partial_r P$. Nous ne détaillons pas le raisonnement permettant d'obtenir le seuil de l'instabilité qui est très bien expliqué dans les livres de [Charru \(2007\)](#) ou [Drazin & Reid \(1981\)](#). Ce raisonnement permet de montrer qu'une condition nécessaire pour la déstabilisation est qu'il existe un point dans l'écoulement pour lequel le carré du moment cinétique $r^2 u_\theta^2$ décroît quand le rayon r augmente, ce qui se traduit par la condition

$$\Phi = \frac{d}{dr} (r^2 u_\theta^2) < 0. \quad (1.41)$$

Φ est le discriminant de Rayleigh et permet d'obtenir directement le taux de croissance σ de l'instabilité centrifuge

$$\sigma = \sqrt{-\Phi}. \quad (1.42)$$

Ce critère est non-visqueux mais la prise en compte de la viscosité ne modifie pas le mécanisme. L'instabilité apparaît si la force à laquelle est soumise la particule de fluide est suffisante pour vaincre l'amortissement visqueux. Notons que l'instabilité centrifuge ne se retrouve pas uniquement entre deux cylindres concentriques mais peut également être présente dans un canal courbe ou dans la couche limite d'une surface courbe du moment qu'un écoulement dévié par une paroi crée un gradient de pression normal aux lignes de courant. Nous nous intéresserons tout particulièrement à cette instabilité dans le chapitre 5.

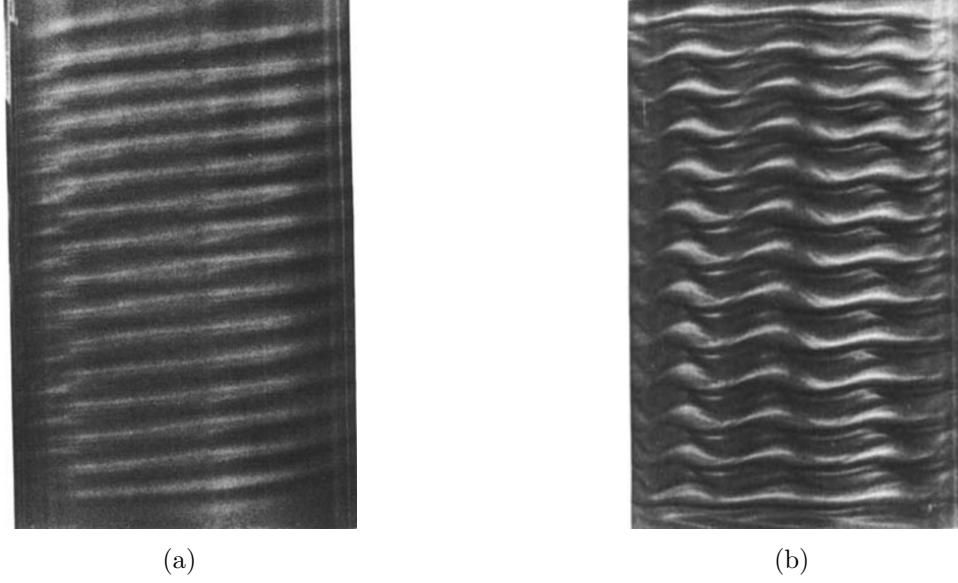


FIGURE 1.24 – (a) Visualisation des rouleaux de Taylor induits par l'instabilité de Taylor-Couette (a) "Laminar spiral flow", l'instabilité est axisymétrique et (b) "Modulated wavy vortex flow" (images extraites de [Andereck *et al.*, 1986](#)).

1.4.2 Instabilité de cisaillement

L'instabilité centrifuge ne constitue pas la seule instabilité induite par des perturbations bidimensionnelles dans les écoulements en rotation. En effet, une instabilité de cisaillement, similaire à celle observée dans les écoulements parallèles est également possible. Pour cette instabilité, Lord Rayleigh a déterminé un critère, appelé le théorème du point d'infection, dans un écoulement en rotation non-visqueux de manière analogue au cas des écoulements parallèles [Rayleigh \(1879\)](#). Au niveau planétaire, les écoulements géostrophiques peuvent être soumis à une instabilité de cisaillement dite barotrope ([Schaeffer & Cardin, 2005](#)).

La longueur caractéristique de cette instabilité est indépendante de la viscosité et est susceptible de générer des champs magnétiques à grande échelle (voir par exemple [Hollerbach, 2003](#); [Schaeffer & Cardin, 2006](#); [Guervilly *et al.*, 2012](#)). Pour des nombres d'Ekman modérés ($E = 10^{-4}$), une instabilité quasi-bidimensionnelle se développe sous la forme de colonnes alignées avec l'axe de rotation et qui dérivent dans l'écoulement ([Ingersoll & Pollard, 1982](#); [Wicht, 2002](#)). Une condition nécessaire pour que l'instabilité de cisaillement barotropique soit présente est que la dérivée radiale de la vorticité axiale $\partial_r \omega_z$ change de signe. Cette quantité s'écrit

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right) \quad (1.43)$$

où r est le rayon en coordonnées cylindrico-polaires et U l'écoulement zonal axisymétrique. On remarque que l'écoulement zonal généré est susceptible de conduire à une instabilité si le gradient de vitesse change brutalement.

Notons que les visualisations directes, à l'aide de colorants, effectuées dans le cas d'une sphère soumise à un forçage de précession ont mis en évidence la présence de structures similaires à celles obtenues pour l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (figure [1.25\(a\)](#)). Cette instabilité a aussi été observée numériquement par [Guervilly *et al.* \(2012\)](#) en utilisant un écoulement zonal variable suivant le rayon (figure [1.25\(b\)](#)). Nous reviendrons sur cette instabilité dans l'étude

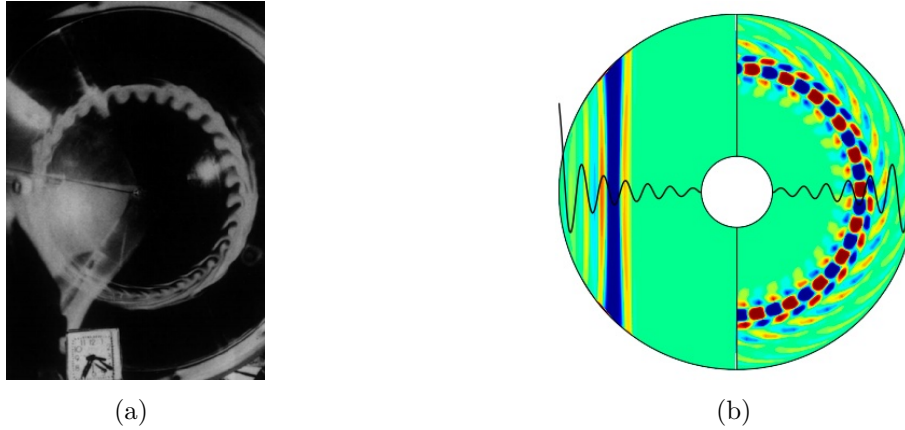


FIGURE 1.25 – (a) Visualisation par injection de colorants d'une structure de petite échelle organisée en tourbillons et située entre deux cylindres géostrophiques (extrait de [Vanyo et al., 1995](#)). (b) Vorticité axiale dans le plan méridional (gauche) et dans le plan équatorial (droite). La courbe noire représente l'écoulement zonal dans le plan équatorial (extrait de [Guervilly et al. \(2012\)](#)).

expérimentale menée au chapitre 7.

1.4.3 Résonance paramétrique

En plus des instabilités centrifuge et de cisaillement, notons aussi la présence possible d'une résonance paramétrique d'ondes inertielles pouvant conduire à une instabilité. Nous ne nous sommes pas intéressés à l'étude de ce type d'instabilités dans ce manuscrit. Néanmoins, nous soulignons ici trois cas classiques rencontrés dans un fluide en rotation soumis à un forçage.

L'instabilité elliptique⁶ est générique dans de nombreux systèmes naturels où des lignes de courant elliptiques sont présentes. Cette instabilité correspond à une déstabilisation tridimensionnelle d'écoulements tournants bidimensionnels (voir la revue de [Kerswell, 2002](#)). De nombreuses études ont été menées sur ce sujet (figure 1.26). Cette instabilité a été étudiée dans différentes thèses menées à l'IRPHE. Pour de plus amples détails et un historique détaillé, nous renvoyons aux thèses de [Eloy \(2000\)](#), [Lacaze \(2004\)](#), [Herreman \(2009\)](#) et [Cébron \(2011\)](#). Un regain d'intérêt pour cette instabilité a eu lieu depuis quelques années pour les nombreuses applications géophysiques et astrophysiques ([Cébron et al., 2010b, 2012a, 2013](#) (*in press*, 2012b)). L'instabilité elliptique est induite par un couplage des modes de Kelvin ([Le Dizès & Eloy, 1999](#); [Eloy, 2000](#)). Cette condition entre l'écoulement de base et les modes de Kelvin est appelée résonance triadique. Ce couplage de mode provient du terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes. Notons que le même mécanisme peut être responsable de l'instabilité de

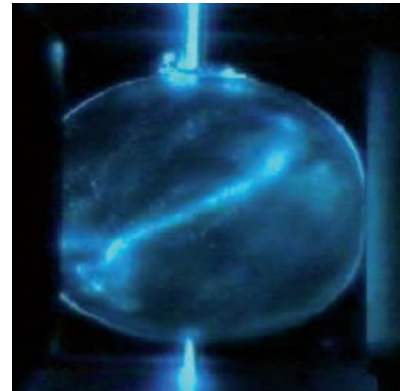


FIGURE 1.26 – Mode de "spin-over" de l'instabilité elliptique dans une sphère en rotation soumise à un forçage de marées (extrait de [Lacaze et al. \(2004\)](#)).

6. également appelée instabilité de marées

précession (voir par exemple la thèse de [Lagrange, 2009](#)).

Les instabilités elliptique ou de précession ne sont pas les seules à être induites par une résonance triadique. Un cas plus industriel, pertinent pour décrire le fonctionnement des moteurs diesels à injection, est de considérer un fluide confiné dans un cylindre en rotation dont la hauteur varie périodiquement dans le temps

$$h(t) = h_0 (1 + \varepsilon \cos(\omega t)) \quad (1.44)$$

où $h(t)$ et h_0 sont respectivement les hauteurs instantanée et moyenne du cylindre et ε et ω sont respectivement l'amplitude et la fréquence du forçage. Notons dans ce cas que le fluide doit être compressible. La dynamique de cet écoulement se rapproche de celle de l'instabilité elliptique, néanmoins, dans ce cas, la fréquence de forçage et la fréquence de rotation sont deux paramètres indépendants. Ce forçage harmonique permet d'exciter des modes inertiels. Une instabilité peut alors apparaître via une résonance d'une paire d'ondes inertielles avec la perturbation externe appliquée. Le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes permet de coupler deux ondes inertielles avec le forçage externe et entraîne une résonance triadique ([Bordes et al., 2012](#)). L'instabilité paramétrique associée à cet écoulement de compression a fait l'objet de nombreuses études, aussi bien expérimentales ([Graftieaux, 2003](#)), analytiques ([Racz & Scott, 2008a,b](#)) que numériques ([Duguet et al., 2005, 2006](#)). Pour de plus amples détails sur ce forçage et la dynamique associée nous renvoyons aux thèses de [Graftieaux \(2003\)](#), [Duguet \(2004\)](#) et [Racz \(2006\)](#).

1.4.4 Forçage vs. instabilité

Alors que les instabilités nécessitent un seuil minimum en amplitude pour se développer, les écoulements résultants de forçages directs sont présents quelle que soit l'amplitude appliquée. Par exemple, alors que l'instabilité elliptique ne peut se développer dans une sphère que si la déformation β vérifie ([Hollerbach & Kerswell, 1995](#); [Lacaze et al., 2004](#))

$$\sigma = \frac{\beta}{2} - 2.62 \sqrt{E} > 0, \quad (1.45)$$

l'écoulement non-linéaire généré par un forçage de marées est toujours présent (voir par exemple [Suess, 1971](#)). Dans cette thèse, sauf mention contraire, nous considérons uniquement les écoulements résultants de forçages et travaillons toujours dans des domaines où les instabilités ne se développent pas.

1.5 Effets d'un forçage harmonique

Avant de rentrer dans le vif du sujet, prenons le temps d'observer le comportement générique d'un fluide placé dans un conteneur soumis à un forçage harmonique. De nombreuses études ont été menées sur un mouvement de précession ([Malkus, 1968](#); [Vanyo et al., 1995](#); [Noir, 2000](#)), un forçage de marées ([Suess, 1970](#); [Malkus, 1989](#)) ou un forçage de libration longitudinale ([Aldridge, 1967](#); [Noir et al., 2009](#)). Si l'on compare les observations effectuées au cours de ces différentes expériences, plusieurs aspects génériques semblent ressortir.

[Malkus \(1968\)](#) a pu mesurer quantitativement le champ de vitesses associé à l'écoulement zonal dans une sphère en précession par visualisation directe. Dans son expérience, une ligne de colorant est produite dans l'écoulement de précession, en régime laminaire, par une différence de potentiel appliquée le long d'un fil s'étendant de l'équateur d'un sphéroïde jusqu'à son centre.

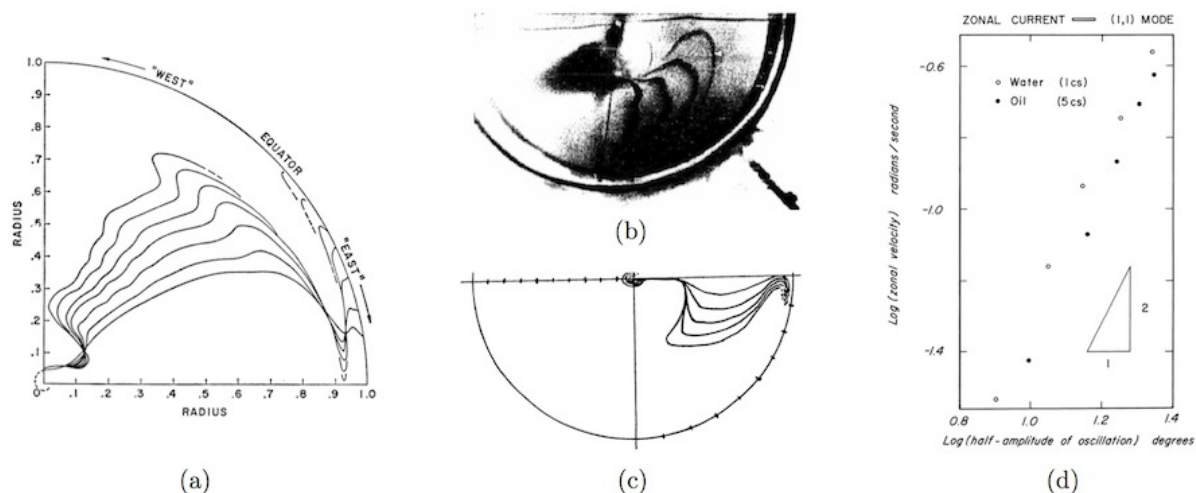


FIGURE 1.27 – (a) Dérive d'une ligne, initialement droite, de colorant sous l'effet d'un forçage de précession dans une sphère (Malkus, 1968). Chaque ligne représente des instants successifs. (b) Photographie du même phénomène observé pour un forçage de marées dans une sphère et (c) schéma correspondant (Suess, 1970). (d) Le même phénomène est observé dans le cas de la libration longitudinale et dans tous les cas varie comme le carré de l'amplitude de forçage (Aldridge, 1967).

Cette différence de potentiel crée un champ électrique qui modifie le pH d'une solution diluée de bleu de thymol par ionisation : il en résulte une ligne de colorant le long d'un rayon du sphéroïde. Puis, en prenant une image toutes les minutes depuis le pôle de la sphère, la déformation des lignes de courant peut être mesurée et permet de remonter à l'écoulement zonal généré par le forçage de libration. Ce résultat est présenté en figure 1.27(a). La dérive des particules de colorant au cours du temps met en évidence la présence d'un écoulement zonal rétrograde dont l'amplitude dépend de la distance à l'axe de rotation. La même méthode a été appliquée pour un forçage de marées, avec une déformation fixe, par Suess (1970, 1971) et un comportement similaire est observé. Une ligne de courant initialement droite, le long d'un rayon, est advectée par l'écoulement et la présence d'un écoulement zonal la déforme, comme le montre la photographie de la figure 1.27(b). Ici aussi, la forme et la position des lignes de courant peuvent être représentées toutes les minutes et conduisent à une figure similaire à celle obtenue par Malkus pour la précession (1.27(c)). Dans ces deux cas, une étude systématique de l'amplitude de l'écoulement zonal a montré une variation comme le carré de l'amplitude du forçage, typique d'un effet non-linéaire. Aldridge (1967) est arrivé à la même conclusion dans un conteneur oscillant au cours du temps (figure 1.27(d)). Cet effet sera l'objet d'étude de la partie suivante.

Notons la présence d'une instabilité, dans le cas d'un mouvement de libration longitudinale, pour une amplitude de forçage assez grande (figure 1.28(a)). Des observations expérimentales ont mis en évidence que, juste au-dessus du seuil, cette instabilité est centrifuge (Noir *et al.*, 2009). Puis, si on augmente encore l'amplitude de forçage, une zone turbulente apparaît au voisinage de la paroi extérieure (figure 1.28(b)). Noir *et al.* (2010) ont montré expérimentalement que cette instabilité apparaît également dans un cylindre en libration longitudinale (figure 1.28(c)). Dans la troisième partie, nous considérerons cette instabilité particulière. Puis, nous verrons que dans le cas d'une zone turbulente dans un fluide en rotation, des ondes inertielles peuvent être générées spontanément. Ce mécanisme, illustré sur l'instabilité induite par libration longitudinale, est suspecté d'être générique à tout fluide en rotation où une zone turbulente localisée est produite.

Pour finir, des visualisations par particules de Kalliroscope ont permis de montrer que pour

un forçage de libration longitudinale (figure 1.29(a) extraite de Aldridge, 1967), de précession (figure 1.29(b) extraite de Noir, 2000) ou de marées (figure 1.29(c) extraite de Morize *et al.*, 2010) des bandes de cisaillement peuvent être présentes dans le volume. Cette alternance de bandes sombres et claires traduit des variations de vitesse conséquentes. En pratique, ce phénomène apparaît dans la gamme d'existence des ondes inertielles et sera étudié dans la quatrième partie. Nous discuterons également de l'hypothèse d'une couche d'Ekman d'épaisseur constante qui n'est plus valide du fait de l'apparition de latitude critique.

Nous pouvons résumer cette thèse par l'étude des trois situations présentées figure 1.30.

- La génération d'un écoulement zonal en l'absence d'ondes inertielles est étudiée dans la seconde partie de ce manuscrit (figure 1.30(a)).
- La présence d'une instabilité centrifuge pour un forçage de libration longitudinale et la génération spontanée d'ondes inertielles dans la troisième partie (figure 1.30(b)) ;
- L'influence des ondes inertielles à travers l'étude des résonances d'ondes inertielles et des latitudes critiques est abordée dans la quatrième et dernière section de ce manuscrit (figure 1.30(c)).

Nous rappelons que ces effets, induits par un forçage harmonique sur un écoulement en rotation, sont génériques. Selon les ressources numériques et expérimentales ainsi que les facilités pour traiter le problème analytiquement, nous étudions tour à tour le forçage de libration longitudinale ou le forçage de marées.

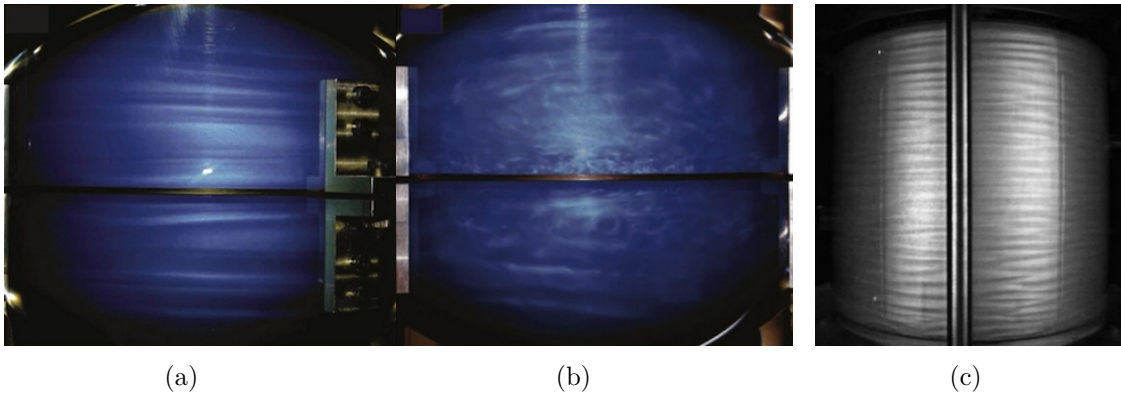


FIGURE 1.28 – (a) Instabilité induite par un forçage de libration longitudinale dans une sphère et (b) écoulement turbulent obtenu à plus grande amplitude de forçage (Noir *et al.*, 2009). (c) Même instabilité en géométrie cylindrique (Noir *et al.*, 2010).

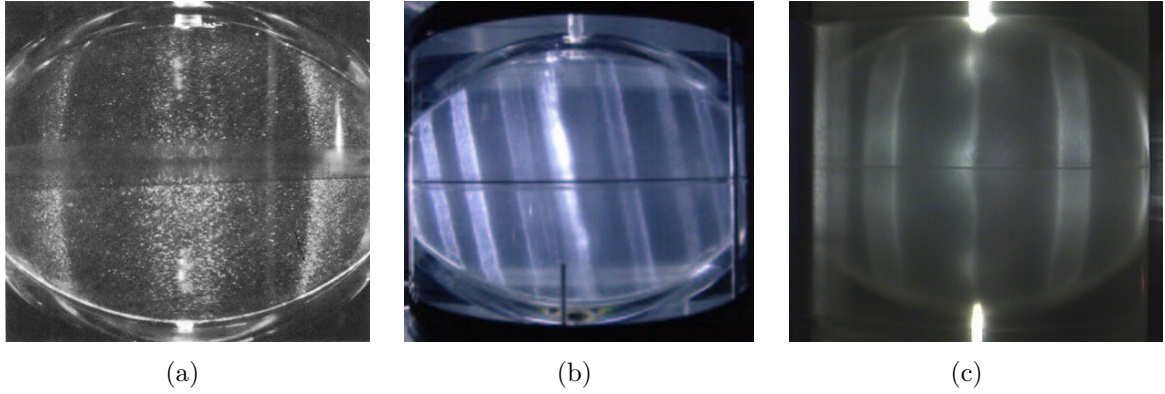


FIGURE 1.29 – Visualisation par particules de Kalliroscope de la structure de l'écoulement pour un forçage résonant. (a) Sphère en libration (Aldridge, 1967). (b) Sphéroïde en précession (Noir, 2000). (c) Forçage de marées sur une sphère en rotation (Morize *et al.*, 2010).

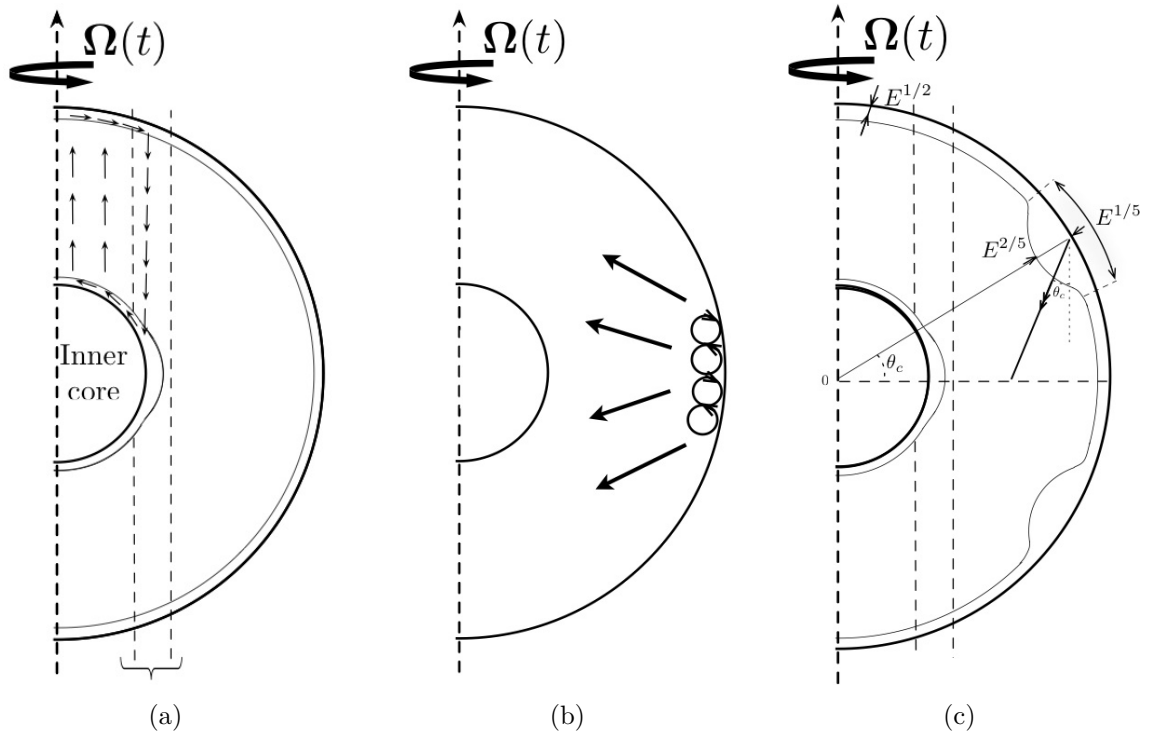


FIGURE 1.30 – Représentation schématique des effets d'un forçage de libration longitudinale sur une coquille sphérique. (a) Génération d'un écoulement zonal; visualisation dans le référentiel en rotation d'une ligne de colorants (en rouge) advectées par les effets non-linéaires (là flèche indique le sens du temps). (b) Instabilité centrifuge au voisinage de la paroi extérieure et génération spontanée d'ondes inertielles. (c) Excitation directe d'ondes inertielles et présence d'une latitude critique.

Méthodes

I have always attached great importance to the manner in which an experiment is set up and conducted [...] the experiment should be set up to open as many windows as possible on the unforeseen.

Frédéric Joliot-Curie

Sommaire du chapitre

2.1	Approche analytique	36
2.1.1	Couches d'Ekman et écoulement en volume	36
2.1.2	Ondes inertielles	36
2.1.3	Approche asymptotique et écoulement zonal	36
2.2	Dispositif expérimental	37
2.2.1	Présentation du dispositif	37
2.2.2	Déformation de marées au laboratoire	38
2.2.3	Forçage de libration longitudinale	40
2.2.4	Mesures qualitative et quantitative	41
2.3	Approche numérique	44
2.3.1	Principe du modèle numérique	44
2.3.2	Validation du modèle numérique	46

Dans ce chapitre, nous présentons les différentes méthodes utilisées au cours de cette thèse afin de décrire la dynamique du fluide dans un conteneur en rotation lorsque celui-ci est soumis à un forçage harmonique. Nous détaillons brièvement dans la section 2.1 les principes utilisés dans *l'approche analytique* tels que la présence de couches d'Ekman ou les bases de l'approche perturbative. Cependant, l'approche théorique demeure parfois insuffisante ou trop complexe pour décrire entièrement l'écoulement généré dans certaines gammes de paramètres. Aussi, nous considérons également des expériences et des simulations numériques. Dans la section 2.2, nous présentons le *dispositif expérimental* utilisé pour générer un forçage de marées ou un forçage de libration longitudinale. Nous détaillons le dispositif en lui-même ainsi que les méthodes d'investigations qualitative et quantitative de l'écoulement. Pour finir, nous détaillons dans la section 2.3 la *méthode numérique* axisymétrique qui nous permet d'étudier un forçage de libration longitudinale dans différentes géométries. Nous expliquons les principaux points de ce modèle et validons notre approche numérique à l'aide de résultats expérimentaux disponibles dans la littérature.

2.1 Approche analytique

Bien que la théorie des écoulements tournants ait été présentée en introduction, nous soulignons ici les principes fondateurs que nous utilisons dans les études théoriques développées dans les chapitres suivants.

2.1.1 Couches d'Ekman et écoulement en volume

Considérons un écoulement en rotation à grande vitesse, i.e. à faible nombre d'Ekman, et en l'absence d'ondes inertielles dans le volume. Nous avons vu au chapitre 1 que l'on peut supposer que les effets visqueux sont localisés. Plus précisément, la théorie des couches limites dans les écoulements en rotation permet de séparer l'écoulement total en :

- (a) un écoulement dans le volume, considéré comme non-visqueux ($E = 0$);
- (b) une zone proche des parois où les effets de la viscosité sont pris en compte.

L'épaisseur de la couche visqueuse au voisinage des parois a typiquement une taille caractéristique $\delta \sim \sqrt{E}$ et est appelée couche d'Ekman (voir chapitre 1). Cette épaisseur peut parfois être différente, par exemple lors de la présence de latitudes critiques comme nous le verrons dans le chapitre 8, où, à une latitude donnée, le terme de Coriolis est égal au terme visqueux et de nouvelles échelles doivent être considérées. De plus, nous étudierons dans le chapitre suivant, que pour une coquille sphérique, des effets visqueux peuvent apparaître dans le volume sous forme de couches de Stewartson.

Ce cadre théorique permet, par exemple, de calculer l'écoulement non visqueux dans le volume, \mathbf{U} . Puis, si cet écoulement ne satisfait pas les conditions aux limites à la paroi, nous introduisons des coordonnées de couche limite, \tilde{r} , basées sur l'épaisseur de la couche visqueuse. Par exemple, pour une sphère en rotation, nous définissons près de la paroi extérieure, en $r = 1$, la variable $\tilde{r} = (1 - r)/\sqrt{E}$. Nous remarquons que cette nouvelle variable vaut $\tilde{r} = 0$ à la paroi et, dans la limite où $E \rightarrow 0$, $\tilde{r} \rightarrow +\infty$ pour sortir de cette couche visqueuse. Nous calculons alors l'écoulement dans la couche d'Ekman, \mathbf{u} , qui vérifie les conditions aux limites imposées par le forçage en $\tilde{r} = 0$. De plus, cet écoulement doit se raccorder au champ de vitesses obtenu dans le volume, ce qui se traduit par l'égalité $\mathbf{u}(\tilde{r} \rightarrow +\infty) = \mathbf{U}(r = 1)$. De cette manière, nous obtenons l'écoulement dans toutes les régions du conteneur. Le même principe s'applique pour des couches visqueuses d'épaisseurs différentes, par exemple pour les couches de Stewartson, comme nous le verrons au chapitre 3.

2.1.2 Ondes inertielles

L'hypothèse précédente est assez forte et ne peut s'appliquer pour une fréquence de forçage $\omega \in [0; 2]$, où des ondes inertielles sont présentes dans le fluide. Dans ce cas, mener une étude analytique est beaucoup plus complexe, tout particulièrement lors d'un forçage résonant. Pour cette raison, les études analytiques évaluant l'écoulement non-linéaire généré par un forçage sont effectuées en l'absence d'ondes inertielles. Lorsque celles-ci sont présentes, nous utilisons le dispositif expérimental ou des simulations numériques.

2.1.3 Approche asymptotique et écoulement zonal

Munis de l'approximation de couches limites, nous pouvons déterminer l'écoulement non-linéaire dans le volume. Cette méthodologie a été utilisée pour un mouvement de précession (Busse, 1968b), d'un forçage azimutal (Suess, 1971, même si comme nous le verrons la condition

aux limites utilisée prête à discussion) et plus récemment dans la limite des faibles fréquences de libration longitudinale (Busse, 2010a).

Le principe de cette méthode est le suivant : nous considérons des forçages de faible amplitude, $\epsilon \ll 1$, ce qui est vérifié pour la plupart des applications géo-/astrophysiques. Puis, en effectuant une approche perturbative, nous pouvons développer le champ de vitesses sous la forme d'une série de l'amplitude de forçage, ϵ ,

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n U_n = U_0 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + O(\epsilon^3) \quad (2.1)$$

L'écoulement à l'ordre zéro, noté U_0 , demeure généralement une rotation solide autour de l'axe. On calcule ensuite l'écoulement généré au premier ordre par le forçage harmonique temporel ou azimutal, U_1 . Puis les interactions non-linéaires de la solution au premier ordre avec elle-même peuvent conduire à un terme non-linéaire, U_2 . Cette solution non-linéaire est constituée d'un terme harmonique de période azimutale et/ou temporelle double de celle du forçage imposé. Mais, elle est également composée d'un terme stationnaire et/ou axisymétrique que l'on désire évaluer. En effet, d'un point de vue géo-/astrophysique, ce terme est susceptible d'apporter une contribution conduisant à une dérive moyenne des particules de fluide non nulle au bout d'une période. Ce terme est ce qu'on appellera dans la suite *vent zonal*. Cet écoulement est axisymétrique, stationnaire et varie comme le carré de l'amplitude du forçage.

2.2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental utilisé durant cette thèse a été initialement conçu afin d'étudier l'influence d'un forçage de marées dans une sphère déformable en rotation à vitesse constante. Ce dispositif s'inscrit dans une tradition de l'étude de l'instabilité elliptique à l'IRPHE (Eloy, 2000; Lacaze, 2004; Herreman, 2009; Cébron, 2011). L'expérience originelle en géométrie sphérique, inspirée du dispositif expérimental construit par Malkus (1989), était conçue pour déterminer le seuil d'apparition de l'instabilité elliptique, la sphère avait alors la taille d'une balle de ping-pong (Lacaze *et al.*, 2004, 2005). Malheureusement, il était impossible, dans un tel dispositif, d'étudier l'influence d'un forçage résonant et d'effectuer des mesures du champ de vitesses du fait de sa taille réduite. Un nouveau dispositif expérimental, de taille plus conséquente a alors été construit. Dans cette section, nous décrivons les principales caractéristiques de ce dispositif ainsi que les méthodes d'investigation de l'écoulement. A noter que ce dispositif a également permis de mesurer l'écoulement induit par forçage longitudinal dans une sphère à faibles fréquences d'oscillations (Sauret *et al.*, 2010).

2.2.1 Présentation du dispositif

Le principe de l'expérience consiste à mettre en rotation solide du fluide, contenu dans une sphère, puis à introduire un forçage harmonique afin d'étudier la réponse du fluide à ce forçage. Selon la fréquence du forçage harmonique, des modes résonants peuvent être observés (voir section 1.2.6). En l'absence de ces résonances de modes, une modification moins importante de l'écoulement a tout de même lieu, induite par le couplage visqueux avec les parois de la sphère. En pratique, la visualisation d'un forçage résonant peut se faire à l'aide de particules de Kalliroscope comme nous le verrons dans la suite. Dans ce cas, on observe des bandes verticales de différentes luminosités dans le volume du fluide qui correspondent à des variations importantes du champ de vitesses, et donc à la présence de cisaillement au sein du fluide (figure 2.1(a)). La rotation du

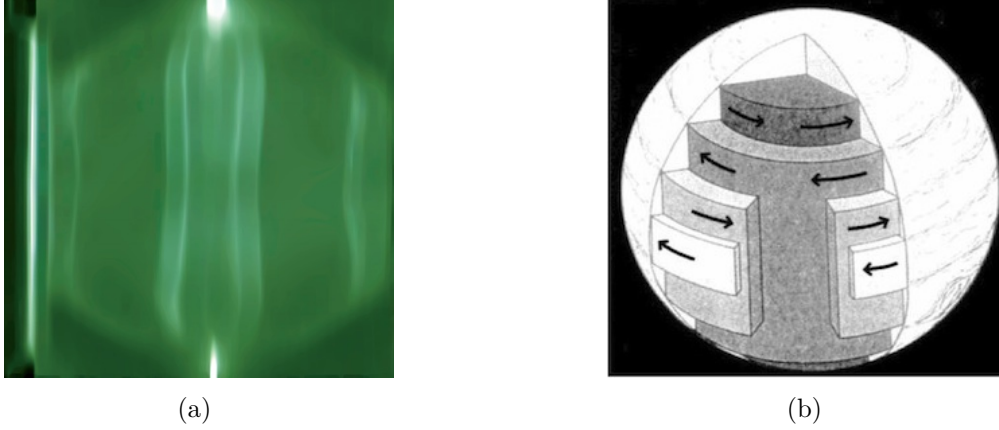


FIGURE 2.1 – (a) Exemple de visualisation par particules de Kalliroscope de l'écoulement résonant généré par un forçage de marées. (b) Représentation schématique de cylindres géostrophiques (extrait de [Ingersoll \(1990\)](#)).

fluide implique que ces variations de vitesse s'organisent sous forme de cylindres géostrophiques comme illustré figure 2.1(b). Le but de notre expérience est de déterminer la fréquence de ces forçages résonants et de mesurer quantitativement l'amplitude de l'écoulement généré pour en tirer des lois d'échelles en fonction des paramètres du problème comme l'amplitude du forçage ou le nombre d'Ekman.

Une vue générale du dispositif expérimental dans le cas d'un forçage elliptique est présentée figure 2.3. Pour les deux forçages considérés durant cette thèse, les marées et la libration longitudinale, nous avons utilisé une sphère creuse, de rayon $R = 10$ cm, moulée dans du silicone déformable et transparent afin de permettre une visualisation directe de l'écoulement. Cette sphère est mise en rotation autour de son axe à une vitesse Ω_{spin} . La sphère est remplie d'eau à laquelle on ajoute soit des particules de Kalliroscope pour effectuer une visualisation qualitative de l'écoulement (voir la sous-section 2.2.4.1), soit des particules permettant des mesures plus quantitatives via un système PIV (voir la sous-section 2.2.4.2). Du fait de la différence d'indice optique entre l'air, le silicone et l'eau, il faut prendre en compte les déformations optiques lors des observations directes ou lors des mesures PIV (voir Annexe C).

2.2.2 Déformation de marées au laboratoire

Le forçage de marées généré par un satellite gravitant à la vitesse angulaire Ω_{orb} autour d'une planète tournant sur elle-même à la vitesse Ω_{spin} induit une déformation elliptique de celle-ci. Pour reproduire cette forme elliptique de la planète au laboratoire, nous modélisons l'influence du satellite par deux rouleaux, placés à 180° l'un de l'autre et à 90° du satellite imaginaire. Ces deux rouleaux déforment la sphère en une forme ellipsoïdale équivalente à un forçage de marées (voir figure 2.2). Le phénomène de résonance dans une telle structure requiert

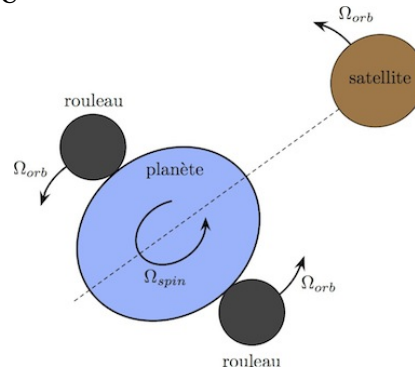


FIGURE 2.2 – Schéma du forçage de marées et de l'analogie expérimentale où l'on déforme la sphère en rotation à l'aide de deux rouleaux.

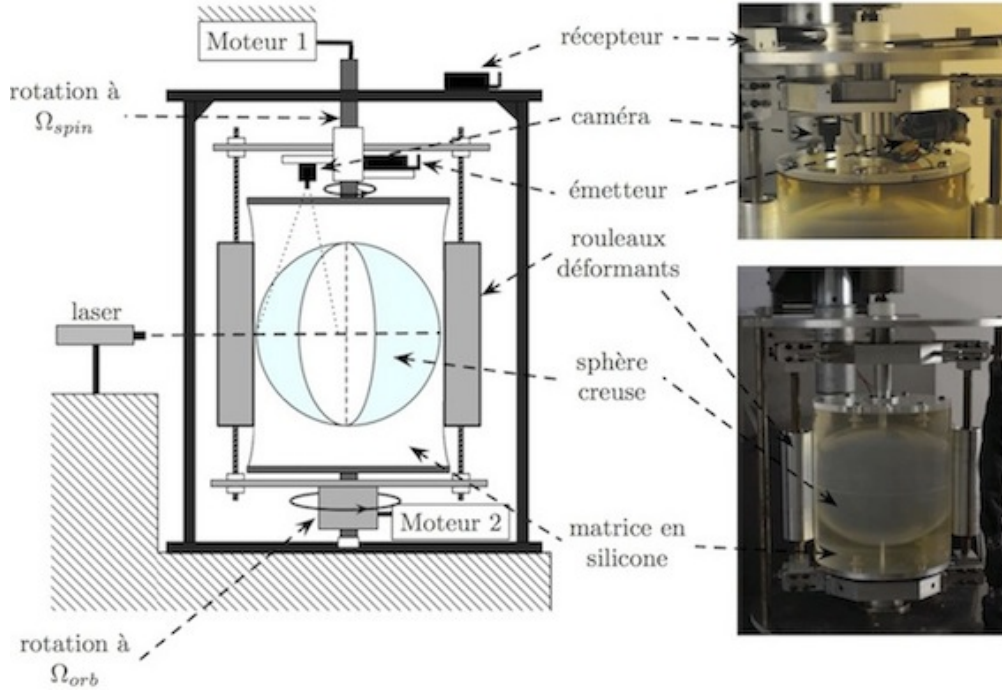


FIGURE 2.3 – Vue d'ensemble du dispositif expérimental utilisé pour le forçage de marées.

une fréquence de forçage bien définie.

Ainsi, la déformation elliptique doit pouvoir tourner à une vitesse angulaire Ω_{orb} différente de la vitesse angulaire de la sphère, Ω_{spin} . Ce rôle est assuré par le moteur 2, qui tourne indépendamment de la sphère, à une vitesse $\Omega_{orb} \in [2; 12] \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ avec une précision de l'ordre de $\pm 0,3\%$ et contrôlée par ordinateur. La sphère tourne sur elle-même avec une vitesse $\Omega_{spin} \in [2; 16] \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ avec une précision de $\pm 0,3\%$. En l'absence de déformation elliptique et avec la précision dont on dispose, l'écoulement mesuré dans le volume est bien une rotation solide.

2.2.2.1 Valeur de l'ellipticité

Expérimentalement, nous pouvons calibrer le serrage des rouleaux afin que ceux-ci soient exactement tangents à la sphère. Ensuite, le problème est de déterminer à quelle ellipticité va correspondre un serrage des rouleaux imposé, i.e. une déformation donnée. Dans notre dispositif, le réglage de la compression des rouleaux sur la sphère est fait avec une précision de $1/6 \text{ mm}$. Pour déterminer précisément l'excentricité correspondant à un serrage donné, nous avons rempli la sphère d'eau en laissant l'ouverture supérieure libre : lorsqu'on déforme la sphère, de l'eau, dont on peut mesurer le volume, sort par ce trou de petit diamètre (10 mm). Ensuite, on comprime de façon contrôlée la sphère entre deux serres-joints dont on connaît précisément l'écartement. Pour une valeur donnée de cet écartement, on relève le volume d'eau sortant de la sphère. On suppose également que lorsque la sphère est déformée par les rouleaux suivant une direction et qu'elle est confinée entre les deux plaques supérieure et inférieure, la déformation est amortie par la direction transverse. C'est-à-dire que si (Oz) est l'axe de rotation et que la sphère est comprimée suivant l'axe (Ox) , alors elle va se dilater uniquement suivant la direction (Oy) . La

sphère est confinée entre deux plaques fixes, ainsi la hauteur verticale de la sphère ne varie pas et reste égale $c = 20$ cm. Ceci nous permet de relier le volume d'eau sortant aux dimensions de l'ellipsoïde. On a alors pu vérifier que l'excentricité β satisfait à la relation

$$\beta = \frac{2s}{R} \quad (2.2)$$

où s représente le serrage de la sphère et $R = 10$ cm représente son rayon. Au vu des valeurs de serrage et de la précision dans nos expériences, l'ellipticité se situe dans la gamme $\beta \in [0,02; 0,08]$ avec une précision de $\pm 4 \times 10^{-3}$.

2.2.2.2 Influence d'un noyau interne

Dans certaines expériences, nous avons voulu étudier l'influence de la présence d'un noyau interne sur l'écoulement généré par le forçage de marées. En effet, les simulations numériques de la résonance de modes dans un conteneur sphérique effectuées par Tilgner (2007) suggèrent que la présence d'un noyau interne amplifie fortement l'écoulement zonal qui diverge quand le nombre d'Ekman tend vers 0.

Pour insérer un noyau interne dans la sphère en silicone déformable, nous avons fixé une boule¹ de diamètre $d = 65$ mm, percée en son milieu, sur une tige en acier de diamètre 4 mm. Ce diamètre de tige est un bon compromis entre une taille qui ne perturbe pas trop l'écoulement et une rigidité suffisante. Nous plaçons ensuite la tige entre les deux hémisphères (figure 2.4) que l'on referme et scelle avec de la colle polymère assurant une étanchéité parfaite. La tige s'insère alors parfaitement dans les deux orifices en haut et en bas de la sphère en silicone. Ainsi le noyau reste à une position fixe (au centre de la sphère) et tourne à la vitesse de la paroi extérieure.

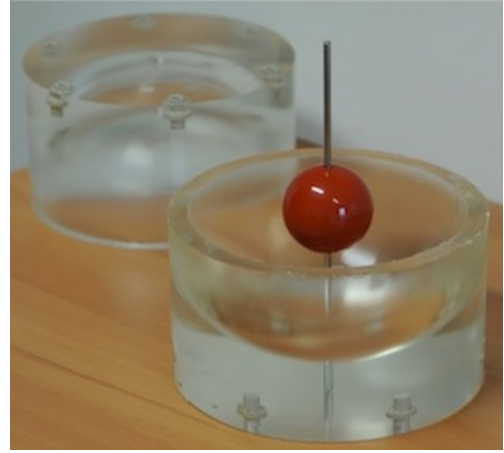


FIGURE 2.4 – Deux hémisphères en silicone au sein desquels on place le noyau sur une tige en acier.

Notons que le rayon du noyau interne utilisé dans les expériences permet d'avoir un rapport d'aspect $a = R_{int}/R_{ext} \simeq 0.35$ qui est similaire à celui du noyau terrestre.

2.2.3 Forçage de libration longitudinale

Le dispositif expérimental permet d'étudier les forçages de marées, mais nous l'avons également adapté pour étudier un forçage de libration longitudinale. Dans ce cas, les rouleaux de part et d'autre de la sphère ne sont pas utilisés. La sphère est mise en rotation à la vitesse Ω_{spin} qui peut aller jusqu'à 85 tours par minute avec une précision de $\pm 0,3\%$ comme dans le cas du forçage de marées. Nous attendons durant une dizaine de minutes afin que le fluide dans la sphère soit en rotation solide. Ensuite, via un contrôle par ordinateur (carte/Labview), nous introduisons une oscillation temporelle de la vitesse de rotation sous la forme $\epsilon \cos(\omega_{lib} t)$ où

1. Le noyau interne est fait de résine phénolique, matière identique à celle d'une boule de billard, et a été fourni par la société Saluc (<http://www.saluc.com/>).

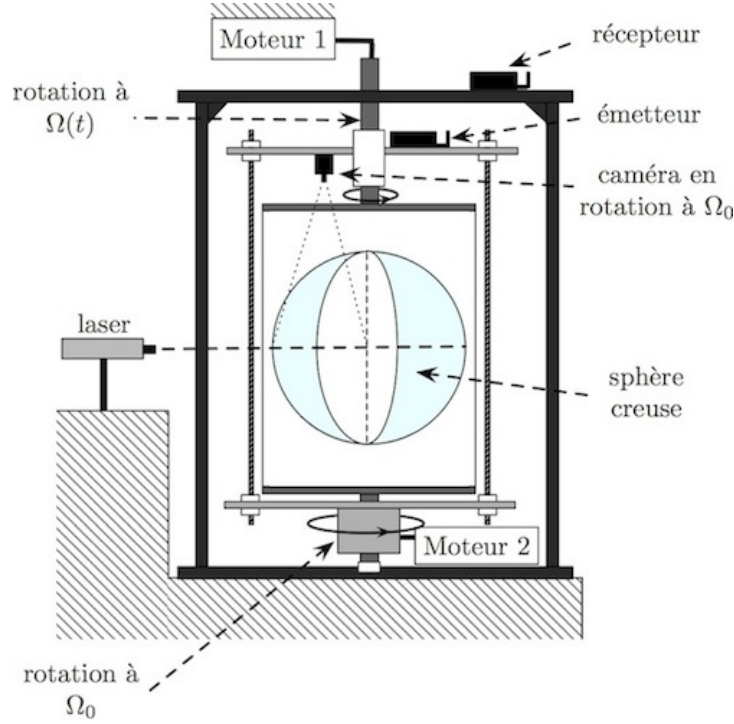


FIGURE 2.5 – Vue schématique du dispositif expérimental pour le forçage de libration longitudinale.

$\omega_{lib} \in [0.6; 10]$ tours/minute avec une précision de $\pm 0.3\%$. Au delà de cette fréquence d'oscillation, notre système n'est plus adapté : l'inertie totale du système est trop grande pour la capacité du moteur dont nous disposons et nous avons pu observer que la fréquence imposée en entrée n'est pas la fréquence réelle d'oscillation de la sphère. En termes de nombres sans dimension, nous pouvons explorer les gammes de paramètres suivantes : le nombre d'Ekman varie entre $E = \nu/\Omega_0 R^2 \in [10^{-5}; 10^{-4}]$, le rapport entre la fréquence de libration et de rotation est $\omega = \omega_{lib}/\Omega_0 \in [0.04; 0.1]$ et l'amplitude de libration $\epsilon \in [0.02; 0.15]$ avec une précision de $\pm 0.6\%$.

2.2.4 Mesures qualitative et quantitative

2.2.4.1 Visualisation directe par particules de Kalliroscope

Une méthode particulièrement simple de visualisation de l'écoulement se fait au moyen de particules anisotropes de Kalliroscope AQ1000². La sphère est remplie d'eau à laquelle sont ajoutées des particules Kalliroscope permettant de visualiser les écoulements secondaires et donc la présence de zones de cisaillement (Abcha *et al.*, 2008; Goto *et al.*, 2011). Ces particules sont anisotropes : elles ont une forme allongée et plate ($30 \mu\text{m} \times 6 \mu\text{m} \times 0,07 \mu\text{m}$) avec un indice optique $n = 1,85$ et une densité $d = 1,62$. La sédimentation de ces particules est négligeable sur la durée d'une expérience (inférieure à une heure), de plus, ces particules réfléchissent très bien la lumière et ne modifient pas la

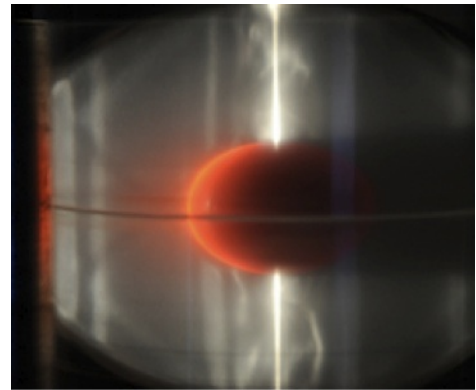


FIGURE 2.6 – Exemple de visualisation par Kalliroscope dans la coquille sphérique.

2. Kalliroscope Corporation, <http://www.kalliroscope.com>

viscosité du fluide ou ne rajoutent pas d'effets non-newtoniens aux concentrations utilisées. La quantité de particules anisotropes mélangée au fluide intermédiaire influe sur la visualisation de l'écoulement : une quantité trop faible ne permet pas d'avoir un contraste suffisant entre les zones cisailées, alors qu'une quantité trop importante ne permet pas à la tranche lumineuse de pénétrer suffisamment loin dans le fluide pour obtenir une bonne visualisation en volume et peut masquer un certain nombre de bandes de cisaillement (l'influence de la concentration en Kalliroscope sur la visualisation obtenue est détaillée par [Noir, 2000](#)). La quantité idéale en particules doit être déterminée expérimentalement : trouver un compromis entre un bon contraste, une bonne luminosité et une bonne vision des bandes de cisaillement. La figure 2.6 montre un exemple de visualisation obtenue : on peut y voir des ondes inertielles obliques tangentes au noyau ainsi que la présence de cylindres géostrophiques. Empiriquement, nous avons déterminé que la concentration en Kalliroscope qui semble la plus satisfaisante est de 0,1%. Notons que l'on peut utiliser des concentrations différentes en Kalliroscope pour visualiser différentes parties de l'écoulement. En effet, pour visualiser des instabilités de surface, on préférera saturer la sphère en Kalliroscope (ce qui correspond à une concentration de 1% environ). On effectue un plan laser, ou un plan lumineux de l'ordre de 0,5 à 1 cm avec un rétroprojecteur en lumière blanche, qui illumine une tranche passant par l'axe de la sphère. L'ensemble est filmé par une caméra placée perpendiculairement à ce plan. En effet, les particules de Kalliroscope réfléchissent la lumière dans la direction de la caméra si elles sont orientées à 45° du plan Laser : ces particules ne permettent pas de visualiser la rotation solide, mais les zones où la vitesse varie brutalement, ce qui correspond à des zones de cisaillement importantes qui alignent les particules de telle sorte que l'intensité lumineuse perçue par la caméra est maximum. Néanmoins, même si ces mesures sont pratiques pour déterminer les fréquences résonantes de la sphère via un forçage harmonique ou la présence d'une instabilité, ce type de visualisation avec des particules de Kalliroscope ne permet pas de remonter au champ de vitesses de l'écoulement.

2.2.4.2 Vélométrie par images de particules

Principe de la vélocimétrie par images de particules. La vélocimétrie par images de particules (PIV), à l'inverse de la visualisation par particules de Kalliroscope, permet d'obtenir des champs de vitesses de l'écoulement et donc de quantifier celui-ci en fonction des différents paramètres sans dimension de l'écoulement. La méthode de PIV est une méthode optique non intrusive : les particules ne doivent pas modifier l'écoulement et sont supposées suivre le mouvement du fluide à chaque instant. Les particules utilisées doivent être de taille suffisamment petite pour ne pas modifier l'écoulement ou sédimenter, tout en étant suffisamment grosses pour être vues par la caméra, de plus leur masse volumique doit être la plus proche possible de celle de l'eau, dans notre cas, pour minimiser la sédimentation.

Le principe de cette méthode est d'enregistrer deux images successives de l'écoulement, éclairé par un plan laser, et séparées par un temps δt . Chaque image est ensuite divisée en petites fenêtres, de telle sorte qu'environ 5 à 10 particules soient contenues dans une fenêtre. Un algorithme de PIV, *DPIVSoft* dans notre cas ([Meunier & Leweke, 2003](#)), permet alors de calculer

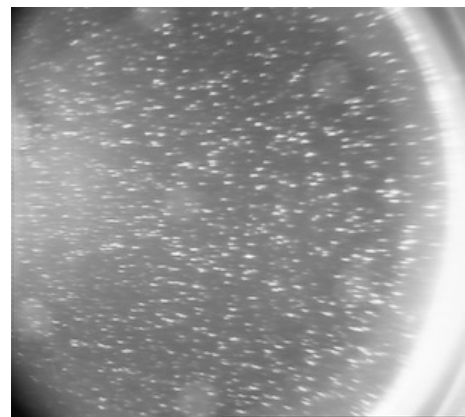


FIGURE 2.7 – Image, enregistrée par la caméra dans le référentiel en rotation, utilisée pour le suivi de particules.

la fonction de corrélation de l'intensité lumineuse induite par la présence de particules entre deux fenêtres identiques entre deux instants séparés par un intervalle de temps δt . Le déplacement de chaque fenêtre, $\delta \mathbf{l}$, est celui qui maximise la fonction de corrélation de l'intensité lumineuse. Nous obtenons alors le champ des vitesses $\mathbf{v} = \delta \mathbf{l} / \delta t$ pour chaque fenêtre, ce qui permet ensuite de reconstruire l'écoulement. On obtient alors la projection tridimensionnelle d'un champ de vitesses dans le plan de la nappe laser. La même procédure se répète ensuite à l'instant δt suivant et nous obtenons l'évolution temporelle du champ des vitesses. Notons que contrairement à la méthode de *particle tracking velocimetry* (PTV), nous ne suivons pas le trajet de chaque particule. Ici, nous effectuons une corrélation entre deux images successives afin d'estimer le déplacement des motifs lumineux formés par les particules.

La technique de vélocimétrie par images de particules est assez délicate à mettre en oeuvre et impose de varier différents paramètres afin d'obtenir les résultats les plus convenables possibles. Dans notre cas, l'écoulement a étéensemencé avec des particules *Optimage* d'un diamètre de $100 \mu\text{m}$ et de densité $1 \pm 2\%$. De plus, l'écoulement doit être correctementensemencé : une trop faible quantité de particules conduit à une résolution spatiale très limitée : il y a trop peu de particules dans l'écoulement pour obtenir une corrélation correcte. A l'inverse, si trop de particules PIV sont lâchées dans le fluide, le contraste n'est pas suffisant car la concentration en particules rend le fluide plus opaque. Des ajustements ont donc été nécessaires sur la quantité de particules relâchées. Pour de plus amples détails sur la méthode PIV, nous renvoyons à la description fournie dans les thèses de [Morize \(2006\)](#) et [Lamriben \(2011\)](#).

Acquisition des images. Dans le cas d'une visualisation qualitative à l'aide de particules de Kalliroscope, le plan laser est aligné avec l'axe de rotation et la visualisation se fait directement dans le référentiel du laboratoire. Pour déterminer l'amplitude de l'écoulement zonal généré par un forçage harmonique, on mesure l'écoulement dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, le plan équatorial. Il faut également noter que les écoulements générés par ces forçages sont faibles par rapport à l'écoulement de rotation solide, typiquement de l'ordre de quelques % tout au plus. Pour avoir une précision suffisante, il faut mesurer le champ de vitesses dans le référentiel en rotation avec la sphère afin de s'affranchir de la composante de rotation solide qui est la plus importante en amplitude. Malheureusement, la place disponible pour fixer une caméra est assez réduite. Nous avons testé plusieurs mini-caméras³. Notre choix s'est finalement porté sur deux modèles de caméra miniature sans fil : *CMOS* ($2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$) de résolution 576×768 pixels et *1/4' Sharp HighQ CCD* $29.4 \times 22 \text{ mm}$ de résolution 576×768 pixels. Dans le cas du forçage de marées, la caméra est fixée à l'axe de rotation de la sphère (voir figure 2.3) et on obtient directement l'écoulement elliptique et le vent zonal. Par contre dans le cas du forçage par libration longitudinale, la caméra est fixée sur le support supérieur et mise en rotation à la vitesse moyenne de la sphère Ω_0 . Nous avons dû prendre en compte la présence d'un léger décalage au cours du temps : la caméra peut tourner légèrement plus vite ou moins vite que la vitesse angulaire moyenne de la sphère. Cette dérive peut être compensée après le traitement des données. On fixe à côté de cette caméra un émetteur, lui aussi en rotation. Le signal est alors capté par un récepteur placé près du dispositif expérimental (voir figure 2.3) puis transmis à un ordinateur. Finalement la vidéo est enregistrée à l'aide du logiciel *Matrox Inspector* nous permettant de définir précisément le pas de temps Δt entre deux images.

Traitement des champs PIV. Afin de traiter les images obtenues, nous avons utilisé le programme DPIVSoft développé au laboratoire. Pour plus de détails nous renvoyons à l'article de [Meunier & Leweke \(2003\)](#).

3. avec plus ou moins de succès, et plus ou moins de vols paraboliques...

Notons que la méthode utilisée pour obtenir les champs de vitesses est identique à celle utilisée par [Morize et al. \(2010\)](#). La seule différence réside dans la valeur de Δt fixée. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 7.

Le dispositif expérimental que nous venons de présenter permet d'obtenir des champs de vitesses de l'écoulement généré par un forçage harmonique de libration longitudinale ou de marées. Néanmoins, ce dispositif présente quelques limitations techniques et physiques. Par exemple, du fait des déformations optiques à l'interface sphérique (cf Annexe C), on ne peut pas mesurer l'écoulement au voisinage de la paroi extérieure. De plus, cette expérience a initialement été pensée pour étudier le forçage de marées uniquement, la vitesse de rotation de la sphère ne peut donc pas osciller trop brutalement du fait des fortes contraintes exercées sur la courroie, typiquement, nous devons nous limiter à une fréquence de libration $\omega < 0.2$ afin que les résultats obtenus gardent une précision suffisante.

2.3 Approche numérique

Ce dispositif expérimental est optimal pour étudier un forçage de marées sur une sphère en rotation, car l'étude de l'écoulement dans un ellipsoïde nécessite des simulations numériques tridimensionnelles ([Cébron et al., 2010a](#); [Cébron, 2011](#)). A l'heure actuelle, les simulations dans un ellipsoïde ne peuvent atteindre des nombres d'Ekman très faibles, au mieux $E = 10^{-4}$ pour des calculs très coûteux ([Cébron et al., 2010a](#); [Chan et al., 2011b,a](#); [Chan, 2012](#)).

Par contre, pour l'étude d'un forçage de libration longitudinale dans un conteneur axisymétrique, en l'absence d'instabilité, on peut légitimement supposer que l'écoulement est "3C-2D" : 3 composantes (u_r, u_θ, u_z) et deux dimensions (r, z). En effet, l'écoulement est axisymétrique autour de l'axe de rotation, le champ des vitesses ne dépend donc pas de la coordonnée orthoradiale θ . Ainsi un modèle numérique axisymétrique permettra d'obtenir une bonne estimation du champ des vitesses. Le but de cette thèse n'était pas de développer un code numérique puissant afin de déterminer l'écoulement généré à de faibles nombres d'Ekman (voir par exemple [Calkins et al., 2010](#)). Nous avons utilisé ici le logiciel commercial Comsol Multiphysics[®] qui se base sur une méthode d'éléments finis et qui est utilisé depuis peu au laboratoire ([Cébron, 2011](#)). Nous avons créé un modèle axisymétrique pour une géométrie sphérique ([Sauret et al., 2010](#)) et cylindrique ([Sauret et al., 2012a](#)). Cette méthode numérique permet de garder des temps de calculs raisonnables (typiquement une journée en utilisant un PC dédié uniquement au calcul numérique) et d'atteindre des nombres d'Ekman jusqu'à $E = 10^{-5}$. Nous présentons dans cette section, le principe du modèle numérique ainsi que sa validation à l'aide d'expériences effectuées dans une sphère en libration longitudinale disponibles dans la littérature ([Aldridge & Toomre, 1969](#); [Aldridge, 1967](#)).

2.3.1 Principe du modèle numérique

Considérons un fluide incompressible et newtonien, de viscosité cinématique ν , de masse volumique ρ contenu dans une sphère de rayon R en rotation autour de son axe à la vitesse angulaire

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \Omega_0 [1 + \epsilon \cos(\omega t)] \mathbf{e}_z \quad (2.3)$$

où Ω_0 est la vitesse angulaire moyenne de la sphère, ϵ et ω sont respectivement l'amplitude et la fréquence de libration (pour plus de détails, voir section 1.3.1.1). Dans le cas d'un forçage de

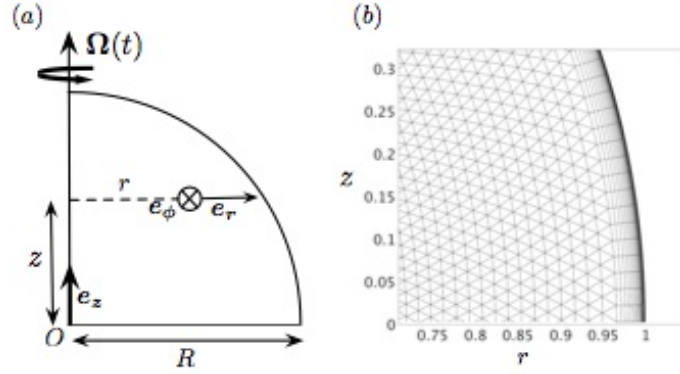


FIGURE 2.8 – (a) Schéma du quart supérieur de la sphère et des coordonnées cylindrico-polaires $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$. (b) Zoom sur le maillage utilisé dans le modèle numérique montrant deux zones : une zone en volume avec des éléments triangulaires et une zone de couche visqueuse avec des éléments quadrilatéraux

faible amplitude, $\epsilon \ll 1$, l'écoulement généré est axisymétrique et présente une symétrie par rapport à l'équateur. Nous résolvons les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible dans le référentiel en rotation à la vitesse angulaire Ω_0 . Pour cela, nous utilisons les coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Les composantes radiale, azimuthale et axiale du champ des vitesses sont u_r , u_θ et u_z . Un schéma du système considéré est représenté en figure 2.8.a. En utilisant respectivement le rayon du conteneur R et l'inverse de la vitesse angulaire moyenne Ω_0^{-1} comme échelles de longueur et de temps, les équations adimensionnées que l'on résout s'écrivent :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} - 2\Omega_0 u_\theta = -\frac{\partial p}{\partial r} + E \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} \right] \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_\theta u_r}{r} + 2\Omega_0 u_r = E \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{u_\theta}{r^2} \right] \quad (2.4b)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + E \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \quad (2.4c)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (2.4d)$$

On applique des conditions aux limites de non-glissement à la paroi extérieure, ce qui se traduit par :

$$u_r(R, z, t) = u_z(R, z, t) = 0 \quad (2.5a)$$

$$u_\theta(R, z, t) = \epsilon r \sin(\omega t) \quad (2.5b)$$

Et les conditions de symétrie sont appliquées sur l'axe de rotation

$$u_r(0, z, t) = 0 \quad (2.6a)$$

$$u_\theta(0, z, t) = 0 \quad (2.6b)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial r}(0, z) = 0 \quad (2.6c)$$

Les simulations numériques d'écoulements tournants à faible nombre d'Ekman induisent la présence de petites échelles de longueur et de temps. Afin de garder une précision numérique correcte nous devons utiliser un maillage suffisamment fin. Dans notre problème, la condition

de non-glissement au voisinage de la paroi extérieure induit la présence d'une couche d'Ekman d'épaisseur typique $E^{1/2}$, de l'ordre de $\delta_E \sim 5 \cdot 10^{-3} R$ pour les nombres d'Ekman considérés dans nos simulations numériques. Par conséquent, afin résoudre ce problème via la méthode des éléments finis, on utilise un maillage séparé en deux domaines (voir figure 2.8.b) :

- (i) un domaine de couche limite d'épaisseur typique $0.035 R$ tout le long de la paroi extérieure et de l'axe d'axisymétrie, qui est discrétisé dans la direction normale à la paroi en 25 éléments quadrilatéraux d'épaisseur initiale $5 \cdot 10^{-5} R$ et un coefficient d'étirement 1.2 ;
- (ii) une zone dans le volume avec des éléments triangulaires.

Tous les éléments sont des éléments de Lagrange standard de type $P1 - P2$ (i.e. linéaires pour le champ de pression et quadratiques pour le champ des vitesses). Dans le chapitre 6, afin d'étudier la génération spontanée d'ondes inertielles, nous avons utilisé des éléments de Lagrange $P2 - P3$ apportant plus de précision mais étant plus coûteux en temps de calcul. On peut noter que la méthode des éléments finis n'induit pas de problème particulier autour de $r = 0$ et qu'aucune technique de stabilisation n'a été utilisée dans ces études. Le solveur temporel est dénommé IDA (Hindmarsh *et al.*, 2005.). Il est basé sur des formules de différence amont ("backward difference"). A chaque pas de temps, le système est résolu avec le solveur linéaire direct PARDISO⁴. Le nombre typique de degrés de liberté (DoF) utilisé dans les simulations est de l'ordre de 160 000 DoF pour la sphère. Notre modèle numérique résout les équations de Navier-Stokes dans le référentiel en rotation à la vitesse $\Omega_0 \mathbf{e}_z$, avec des conditions de non-glissement et un fluide initialement au repos dans ce référentiel (i.e. en rotation solide à la vitesse angulaire Ω_0 dans le référentiel inertiel). Au temps $t = 0$, la paroi extérieure est mise en libration et les calculs sont poursuivis jusqu'à ce qu'on obtienne un état stationnaire, qui est atteint typiquement au bout d'un temps de spin-up visqueux. La vitesse est alors moyennée sur 5 périodes de libration pour obtenir l'écoulement moyen généré. Les résultats sont alors adimensionnés comme dans les expériences et les études analytiques.

2.3.2 Validation du modèle numérique

Avant d'utiliser ce modèle numérique, nous l'avons validé en reproduisant les résultats expérimentaux obtenus par Aldridge & Toomre (1969) pour une sphère en libration longitudinale. Dans leur article, ils ont défini un nombre de Reynolds constant pour la libration et égal à $Re_\omega = \omega_{lib} R^2 / \nu = 6.2 \cdot 10^4$ et la vitesse angulaire utilisée est alors donnée par :

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \tilde{\epsilon} \omega_{lib} \cos(\omega_{lib} t) \quad \text{où } \tilde{\epsilon} = 8.0 \pi / 180 \text{ rad.} \quad (2.7)$$

Aldridge & Toomre (1969) ont alors varié la vitesse de rotation Ω_0 ce qui leur a permis de faire varier la fréquence de libration adimensionnée $\omega = \omega_{lib} / \Omega_0$. En utilisant la même procédure, nous mesurons la différence de pression à partir de nos simulations numériques de manière systématique en changeant la fréquence de libration ω (via Ω_0) tout comme l'avait fait Aldridge & Toomre (1969). Les résultats sont présentés en figure 2.9 et montrent un excellent accord avec les résultats expérimentaux de Aldridge & Toomre (1969) et les résultats numériques de Rieutord (1991). Ceci nous permet de valider notre modèle axisymétrique pour les études de libration. Sur la figure 2.9, chaque pic correspond à une fréquence résonante d'un mode inertiel de la sphère en rotation et est dénoté par deux entiers (n, m) (voir Aldridge & Toomre, 1969). Notons qu'il n'existe pas de modes inertiels pour $|\omega| \geq 2$. De plus, les modes sont progressivement amortis quand $1/\omega$ augmente du fait du couplage réduit entre les oscillations de la sphère et le fluide à

4. www.pardiso-project.org

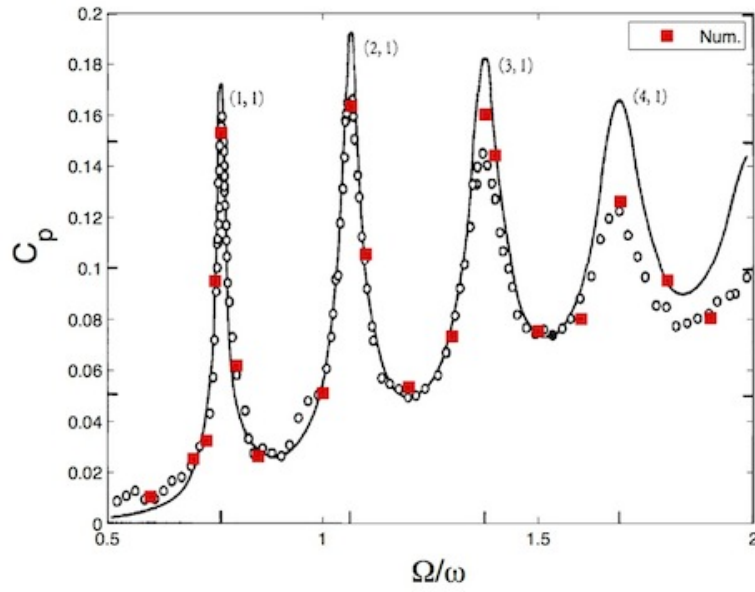


FIGURE 2.9 – Moyenne temporelle de l’amplitude de la différence de pression C_p entre le centre et le pôle de la sphère pour différents rapports de fréquences $\omega = \omega_{lib}/\Omega_0$ pour un forçage de libration $\Omega_0 + \tilde{\epsilon}\omega_{lib} \cos(\omega_{lib}t)$ avec $\tilde{\epsilon} = 8.0\pi/180$ rad et $Re_\omega = \omega_{lib}R^2/\nu = 6.2 \cdot 10^4$. Les valeurs numériques, obtenues avec notre modèle, sont représentées par les carrés ; les cercles représentent les valeurs expérimentales (Aldridge & Toomre, 1969) et la courbe noire est la solution théorique proposée par Aldridge & Toomre (1969).

l’intérieur. De même l’amortissement visqueux augmente quand la structure des modes devient plus complexe.

Deuxième partie

Vent zonal en l'absence d'ondes inertiellles

Chapitre

3

Étude analytique du vent zonal induit par libration longitudinale en géométrie sphérique

Since a general solution must be judged impossible from want of analysis, we must be content with the knowledge of some special cases, and that all the more, since the development of various cases seems to be the only way to bringing us at last to a more perfect knowledge.

Leonhard Euler

Sommaire du chapitre

3.1 Introduction	52
3.2 Cadre de l'étude asymptotique	53
3.2.1 Formulation mathématique	53
3.2.2 Approche perturbative	54
3.3 Réponse linéaire au forçage	55
3.4 Écoulement non-linéaire stationnaire : le vent zonal	57
3.4.1 Structure asymptotique de l'écoulement	57
3.4.2 Solution dans la couche d'Ekman	60
3.4.3 Correction non-linéaire dans le volume	61
3.4.4 Solution dans les couches de Stewartson	64
3.5 Limite des faibles fréquences de libration $\omega \rightarrow 0$	67
3.6 Discussion et validité pour $\omega \in [0; 2]$	68
3.7 Conclusion	69

Dans ce chapitre, nous déterminons l'écoulement généré par un forçage harmonique particulier, la libration longitudinale, dans une sphère ou une coquille sphérique. Nous considérons une fréquence de libration supérieure à deux fois la fréquence de rotation, $\omega > 2$, ce qui implique qu'aucune onde inertielle n'est générée dans le volume. Nous montrons alors qu'un *vent zonal* est généré par des effets non-linéaires dans les couches d'Ekman et modifie l'écoulement moyen. De plus, en présence d'un noyau interne, nous mettons en évidence la présence de couches de Stewartson.

3.1 Introduction

Comme nous l'avons vu en introduction de ce manuscrit, les planètes et les satellites sont soumis, en plus de leur rotation propre, à des forçages harmoniques tels qu'une précession, des déformations de marées ou des librations longitudinales/latitudinales. Les corrections non-linéaires générées par de tels forçages peuvent conduire à des écoulements stationnaires et axisymétriques, que l'on appelle vents zonaux¹, dans les noyaux liquides des planètes telluriques, dans les océans subsurfaciques de certains satellites ou dans les atmosphères des planètes gazeuses. Dans ce chapitre, nous considérons un forçage de libration longitudinale, i.e. une oscillation harmonique de la vitesse angulaire de la planète. Ces oscillations sont généralement induites par un couplage gravitationnel entre un corps astrophysique et son principal attracteur autour duquel il orbite (Comstock & Bills, 2003; Noir *et al.*, 2009). Le forçage de libration peut avoir une contribution non négligeable à l'écoulement total et une meilleure connaissance de sa dynamique peut apporter des informations importantes sur la structure interne d'un satellite ou d'une planète (voir chapitre 1).

Dans ce chapitre, nous déterminons analytiquement l'écoulement généré pour un forçage de libration longitudinale de fréquence supérieure à deux fois la fréquence de rotation propre de la planète. Une telle configuration est loin d'être la situation la plus commune en astrophysique où la fréquence de libration principale correspond la plupart du temps à la fréquence orbitale qui est généralement égale ou plus petite que la fréquence de rotation propre de la planète. Voici quelques situations qui pourraient générer de telles librations rapides. Par exemple, on peut envisager une planète, ou un satellite, dont les fréquences de rotation propre et de rotation orbitale sont en résonance avec un rapport 1 : 2. Cette situation, en principe possible (Goldreich & Peale, 1966; Wiczeorek *et al.*, 2012), pourrait conduire à des librations rapides de fréquence égale à deux fois la fréquence orbitale. Des librations rapides pourraient aussi être présentes dans un corps astrophysique synchronisé² quand le forçage gravitationnel est induit par un autre satellite ou une autre planète de fréquence orbitale plus grande. Les lunes galiléennes (Io, Europe, Ganymède) sont dans une telle situation. En effet, Io a une fréquence orbitale deux fois plus grande que celle d'Europe et quatre fois plus grande que celle de Ganymède³. Ceci pourrait, a priori, forcer une libration d'Europe et de Ganymède avec une fréquence respectivement deux à quatre fois plus grande que leur fréquence de rotation propre. Dans les systèmes exoplanétaires, une situation similaire peut également être trouvée. Par exemple, les deux première planètes dans le système "55 Cancri" ont respectivement des fréquences orbitales de 2,81 et 14,65 jours (Fischer *et al.*, 2008). Puisque de telles planètes sont supposées être synchronisées, la fréquence de libration de la seconde planète induite par le mouvement de la première planète serait alors de $\omega = 14,65/2,81 \approx 5,2$.

La première étude analytique des effets non-linéaires générés par un forçage harmonique a été effectuée par Busse (1968b) dans le cas de la précession d'un sphéroïde. Il a montré qu'un écoulement zonal est généré dans le volume par les interactions non-linéaires dans les couches visqueuses localisées près des parois extérieures. Wang (1970) a ensuite étudié théoriquement et expérimentalement les effets non-linéaires associés à l'oscillation de la vitesse angulaire d'un cylindre en rotation (voir également Busse, 2010b). Le cas d'une déformation de marées, fixe dans le référentiel du laboratoire, a été considéré par Suess (1971) qui a montré qu'un vortex

1. ou écoulement zonal

2. Ce qui signifie que sa fréquence de rotation propre est égale à sa fréquence orbitale. C'est par exemple le cas de la Lune.

3. Source : Nicolas Rambaux, communication personnelle

contra-rotatif doit exister au voisinage de l'axe de rotation associé à la présence de latitudes critiques localisées aux pôles de la sphère (voir chapitre 8). Dans sa thèse, Aldridge (1967) a mentionné que, dans le cas où les ondes inertielles n'apportent pas une contribution significative à l'écoulement, une sphère soumise à une oscillation de sa vitesse angulaire semblait générer une dérive des particules proportionnelle au carré de l'amplitude d'oscillation de la sphère. La seule étude théorique de l'écoulement zonal induit par un forçage de libration longitudinale en géométrie sphérique est le travail récent de Busse (2010a). Celui-ci a obtenu, par une méthode asymptotique, une prédiction analytique de l'écoulement zonal dans la limite des petites fréquences de libration et des petits nombres d'Ekman. Ce chapitre étend cette théorie au cas d'une coquille sphérique pour une fréquence de libration longitudinale arbitraire.

L'étude que nous menons dans ce chapitre suppose qu'aucune instabilité n'est présente. Une instabilité centrifuge ou une instabilité de cisaillement sont a priori possibles quand l'amplitude de libration longitudinale devient suffisamment grande (voir par exemple Noir *et al.*, 2009). Nous reviendrons à la présence possible de ces instabilités dans les chapitres 5 et 7. Dans l'étude analytique qui suit, l'amplitude de forçage est supposée suffisamment faible pour que l'écoulement linéaire, généré à la fréquence de forçage, demeure stable. Pour obtenir une solution analytique rigoureuse, nous supposons également que la fréquence de libration est supérieure à deux fois la fréquence angulaire moyenne de la sphère. Cette hypothèse garantit qu'aucune onde inertielle n'est excitée et qu'aucune singularité n'est présente dans la couche d'Ekman (ceci sera considéré au chapitre 8). Ces hypothèses nous permettent d'obtenir une expression de l'écoulement zonal dans toute la coquille sphérique. Une expression est également donnée pour des fréquences plus petites que deux fois la fréquence de rotation moyenne de la sphère. Néanmoins, dans ce cas, l'expression obtenue présente une divergence associée à la présence d'une latitude critique. Nous allons également voir que pour n'importe quelle fréquence de libration, la présence d'un noyau interne modifie significativement l'écoulement zonal et génère des couches de Stewartson au niveau du cylindre tangent au noyau interne (Stewartson, 1966).

3.2 Cadre de l'étude asymptotique

3.2.1 Formulation mathématique

Considérons un fluide newtonien, homogène et incompressible de viscosité cinématique ν contenu dans une coquille sphérique de rayon externe R_{ext} et de rayon interne R_{int} (figure 3.1). Cette coquille est en rotation, dans le référentiel inertiel, à une vitesse angulaire sinusoïdale dans le temps autour d'une valeur moyenne Ω_0 . Dans la suite, nous utiliserons R_{ext} et Ω_0^{-1} respectivement comme échelles de longueur et de temps. La vitesse de rotation instantanée de la coquille sphérique s'écrit comme la somme d'une rotation constante et d'un terme perturbatif

$$\Omega(t) = [1 + \varepsilon \cos(\omega t)] \mathbf{e}_z, \quad (3.1)$$

où ε et ω sont respectivement l'amplitude et la fréquence du forçage de libration (voir section 1.3.1).

Le forçage de libration longitudinale et le conteneur sont axisymétriques. On peut alors supposer que les champs des vitesses et de pression demeurent axisymétriques. Mathématiquement cela implique que ces deux champs sont indépendants de la variable azimutale ϕ . En regard de

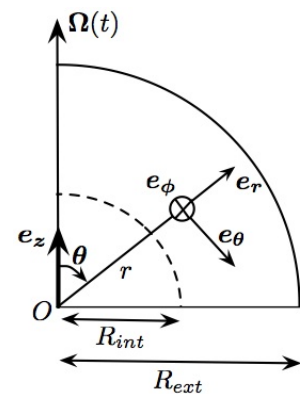


FIGURE 3.1 – Schéma de la géométrie considérée et du système de coordonnées.

la géométrie du problème, on utilise les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . Le champ des vitesses s'écrit dans cette base (u_r, u_θ, u_ϕ) (voir figure 3.1). On peut alors introduire les fonctions ψ et χ définies par :

$$u_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\sin \theta \partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad u_\phi = \frac{\chi}{r \sin \theta}. \quad (3.2)$$

L'utilisation d'une décomposition toroïdale/poloïdale est également possible (voir par exemple Dormy *et al.*, 1998), mais nous préférons utiliser ici la formulation de Stewartson (1966) afin de tirer partie dans la suite des similarités entre notre calcul et son analyse, effectuée dans une coquille sphérique.

Dans le référentiel en rotation à la vitesse angulaire moyenne, Ω_0 , l'équation de Navier-Stokes et l'équation de continuité sous forme adimensionnelle peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D^2 \psi}{\partial t} - 2 \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) - E D^4 \psi &= \frac{2 \chi}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial D^2 \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial D^2 \psi}{\partial r} \right) + \frac{2 D^2 \psi}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + 2 \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - E D^2 \chi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right), \quad (3.4)$$

où on a défini

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (3.5)$$

et E est le nombre d'Ekman représentant le rapport entre les forces visqueuses et la force de Coriolis :

$$E = \frac{\nu}{\Omega R_{ext}^2}. \quad (3.6)$$

On considère des conditions de non-glissement sur toutes les parois dans le cas général où la sphère extérieure et le noyau intérieur oscillent simultanément mais pas nécessairement à la même amplitude. Ces conditions aux limites dans le référentiel en rotation se traduisent, pour les fonctions ψ et χ , par

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \psi = 0 \quad \text{et} \quad \chi = \varepsilon \sin^2 \theta \cos(\omega t) \quad \text{en} \quad r = 1, \quad (3.7a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \psi = 0 \quad \text{et} \quad \chi = \varepsilon \alpha a^2 \sin^2 \theta \cos(\omega t) \quad \text{en} \quad r = a, \quad (3.7b)$$

où $a = R_{int}/R_{ext}$ désigne le rapport d'aspect de la coquille sphérique. Le paramètre α mesure l'amplitude relative de libration du noyau interne par rapport à la paroi extérieure. Pour un noyau qui n'oscille pas au cours du temps, on impose $\alpha = 0$. Quand celui-ci oscille à la même amplitude que la sphère extérieure, on a $\alpha = 1$. Pour une sphère, en l'absence de noyau interne, seule la condition en $r = 1$ doit être prise en compte.

3.2.2 Approche perturbative

L'objectif de ce chapitre est de caractériser l'écoulement stationnaire induit par le forçage de libration longitudinale. Nous supposons que l'amplitude de forçage, ε , est petite de telle sorte que l'écoulement ne se déstabilise pas par instabilité centrifuge (Noir *et al.*, 2009, 2010; Calkins *et al.*, 2010; Sauret *et al.*, 2012a). De plus, considérer la limite $\varepsilon \ll 1$ permet d'obtenir

une solution par approche asymptotique. Dans le cadre de cette limite, les fonctions ψ et χ se développent en série de ε :

$$\psi = \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + o(\varepsilon^2), \quad (3.8a)$$

$$\chi = \varepsilon \chi_1 + \varepsilon^2 \chi_2 + o(\varepsilon^2). \quad (3.8b)$$

La solution au premier ordre en ε , ψ_1 et χ_1 , représente la réponse linéaire du fluide au forçage de libration longitudinale à la fréquence ω imposée par les parois. La solution au second ordre en ε , ψ_2 et χ_2 , représente l'écoulement généré par les interactions non-linéaires de la solution au premier ordre avec elle-même. A l'instar de toute analyse faiblement non-linéaire, la solution au second ordre en ε contient une correction oscillante à la fréquence 2ω et une correction stationnaire, le *vent zonal*. C'est cette seconde contribution qui nous intéresse du fait de sa structure particulière. En effet, au bout d'une période de libration, seule cette composante stationnaire est mesurée et contribue à ralentir ou accélérer le fluide dans le volume.

3.3 Réponse linéaire au forçage

Tout d'abord, déterminons la réponse linéaire du fluide à ce forçage. On désire caractériser l'écoulement dans la limite des petits nombres d'Ekman, $E \ll 1$, comme rencontré en pratique dans les applications géo-/astrophysiques. Pour cette raison, il est naturel de considérer E comme un paramètre asymptotiquement petit. Néanmoins, cette limite $E \rightarrow 0$ est prise après avoir considéré la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans la limite des petits nombres d'Ekman, $E \ll 1$, on s'attend à ce que les effets visqueux soient localisés dans l'espace. Dans cette étude, on suppose, pour la solution au premier ordre, que ces effets restent localisés près des parois. Cette hypothèse, assez forte, n'est satisfaite que dans le cas où aucune onde inertielle n'est excitée dans le volume par le forçage harmonique. Ceci est vérifié si la fréquence de forçage est supérieure à deux fois la vitesse de rotation, ce qui se traduit sous forme adimensionnelle par $\omega > 2$ (voir section 1.2.4). C'est cette condition que l'on impose dans la suite du calcul.

Considérons, dans un premier temps, la couche d'Ekman au voisinage de la paroi extérieure, en $r = 1$. La solution dans cette couche visqueuse peut être déterminée en introduisant une variable locale, \tilde{r} , définie par

$$\tilde{r} = \frac{1 - r}{\sqrt{E}}. \quad (3.9)$$

Écrivons alors l'expression, à l'ordre dominant, de ψ et χ comme

$$\psi_1 \sim \sqrt{E} \psi_1^{(o)} e^{i\omega t} + c.c. \quad (3.10a)$$

$$\chi_1 \sim \chi_1^{(o)} e^{i\omega t} + c.c. \quad (3.10b)$$

où l'exposant (o) (comme "outer") précise que l'on considère la fonction dans la couche visqueuse au voisinage de la paroi de la sphère extérieure et $c.c.$ représente le complexe conjugué. Insérons alors l'expression (3.8a,b) avec (3.10a,b) dans (3.3) et (3.4). On obtient à l'ordre dominant en E et ε (en pratique à l'ordre εE^0), les équations

$$i\omega \frac{\partial^2 \psi_1^{(o)}}{\partial \tilde{r}^2} - 2 \cos \theta \frac{\partial \chi_1^{(o)}}{\partial \tilde{r}} = \frac{\partial^4 \psi_1^{(o)}}{\partial \tilde{r}^4}, \quad (3.11a)$$

$$i\omega \chi_1^{(o)} + 2 \cos \theta \frac{\partial \psi_1^{(o)}}{\partial \tilde{r}} = \frac{\partial^2 \chi_1^{(o)}}{\partial \tilde{r}^2}. \quad (3.11b)$$

De plus, les conditions de non-glissement à la paroi extérieure s'écrivent

$$\psi_1^{(o)}(\tilde{r} = 0, \theta) = 0, \quad (3.12a)$$

$$\partial_{\tilde{r}} \psi_1^{(o)}(\tilde{r} = 0, \theta) = 0, \quad (3.12b)$$

$$\chi_1^{(o)}(\tilde{r} = 0, \theta) = (\sin^2 \theta)/2. \quad (3.12c)$$

Le système d'équations (3.11a)-(3.11b) avec les conditions aux limites (3.12a)-(3.12c) conduit à la solution linéaire dans la couche limite :

$$\psi_1^{(o)} = \frac{i \sin^2 \theta}{4} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_+ \tilde{r}}}{\lambda_+} - \frac{1 - e^{-\lambda_- \tilde{r}}}{\lambda_-} \right], \quad (3.13a)$$

$$\chi_1^{(o)} = \frac{\sin^2 \theta}{4} \left[e^{-\lambda_+ \tilde{r}} + e^{-\lambda_- \tilde{r}} \right], \quad (3.13b)$$

où on a défini

$$\lambda_{\pm} = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega}{2} \pm \cos \theta}. \quad (3.14)$$

Cette expression de λ_{\pm} est typique de l'étude de couches limites visqueuses en géométrie sphérique et a été utilisée par Busse (1968b), Suess (1971) ou Busse (2010a). Notons que la condition sur la fréquence de libration, $\omega > 2$, garantit que la solution dans la couche visqueuse ne diverge pas quelle que soit la valeur de θ . Une telle divergence, qui intervient à la *latitude critique* (voir section 8) est connue pour être une source de zone de cisaillement dans le volume du fluide, comme documenté dans le cas de la précession (voir par exemple Hollerbach & Kerswell, 1995; Kerswell, 1995; Kida, 2011).

Une solution similaire est obtenue dans la couche visqueuse au voisinage du noyau interne en utilisant la variable locale $\hat{r} = (r - a)/\sqrt{E}$:

$$\psi_1^{(i)} = -\alpha \frac{i a^2 \sin^2 \theta}{4} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_+ \hat{r}}}{\lambda_+} - \frac{1 - e^{-\lambda_- \hat{r}}}{\lambda_-} \right], \quad (3.15a)$$

$$\chi_1^{(i)} = \alpha \frac{a^2 \sin^2 \theta}{4} \left[e^{-\lambda_+ \hat{r}} + e^{-\lambda_- \hat{r}} \right], \quad (3.15b)$$

où l'exposant (i) (comme "inner") indique que cette solution est calculée au voisinage de la paroi du noyau interne.

On remarque que lorsque \hat{r} (respectivement \tilde{r}) tend vers l'infini, $\chi_1^{(i)}$ (respectivement $\chi^{(o)}$) tend vers zéro alors que $\psi_1^{(i)}$ (respectivement $\psi^{(o)}$) tend vers une constante non nulle. Cette partie de la solution est responsable d'une contribution dans le volume à l'ordre $\varepsilon \sqrt{E}$ qui correspond au pompage d'Ekman.

En utilisant les expressions (3.13a) et (3.13b) obtenues pour χ_1 et ψ_1 avec les relations (3.2), on peut tracer le champ des vitesses au voisinage de la paroi intérieure et de la paroi extérieure. On peut alors comparer ces profils de vitesses avec le résultat de simulations numériques. Les figures (3.2.a)-(3.2.d) présentent des profils de vitesses extraits de simulations numériques dans une coquille sphérique de rapport d'aspect $a = 0.35$ pour les paramètres $\omega = 4$, $\varepsilon = 0.1$ et $E = 5 \times 10^{-5}$. Les profils de vitesse azimutale u_{ϕ} et orthoradiale u_{θ} ont été extraits pour $\theta = \pi/3$. La vitesse azimutale oscille dans le temps et décroît exponentiellement lorsque l'on s'éloigne de la paroi extérieure, en $r = 1$ (figure 3.2.a). De plus, si on superpose les profils obtenus numériquement avec l'expression théorique trouvée ci-dessus, on note un excellent accord à tout

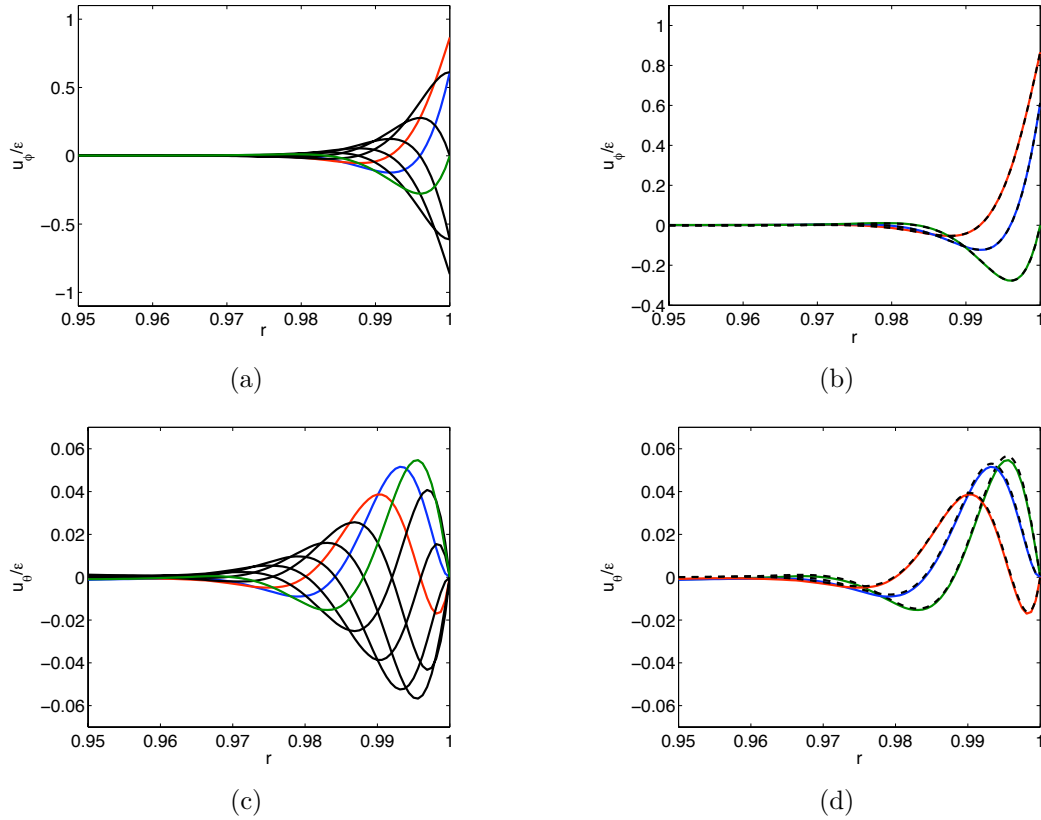


FIGURE 3.2 – Champ de vitesses normalisé par ε pris en $\theta = \pi/3$ dans le référentiel en rotation à la vitesse angulaire Ω_0 près de la paroi extérieure ($r = 1$) pour $\omega = 4$, $\varepsilon = 0.1$, $E = 5 \times 10^{-5}$; (a) u_ϕ/ε est tracée pour 8 temps équidistants durant une période de libration. Les lignes verte, bleue et rouge correspondent respectivement aux temps $3\pi/(2\omega)$, $7\pi/(4\omega)$ et $2\pi/\omega$. (b) Les profils numériques u_ϕ/ε sont comparés avec les profils théoriques (courbes noires en pointillés) aux temps $3\pi/(2\omega)$, $7\pi/(4\omega)$ et $2\pi/\omega$. (c) Vitesse orthoradiale u_θ/ε pour les mêmes paramètres et aux mêmes instants que la figure (a). (d) Comparaison avec les profils théoriques (courbes noires en pointillés).

instant (figure 3.2.b). Néanmoins, on remarque que le champ de vitesse orthoradiale u_θ (figure 3.2.c) présente un léger décalage avec la théorie (figure 3.2.d). En effet, les profils numériques prennent en compte la contribution non-linéaire induite par le forçage de libration longitudinale, alors que, pour l'instant, le champ de vitesses obtenu est linéaire. Il faut donc poursuivre le calcul à l'ordre suivant en ε . Notons que les mêmes constatations peuvent être faites pour le champ des vitesses au voisinage du noyau interne sur les figures (3.3.a)-(3.3.d).

3.4 Écoulement non-linéaire stationnaire : le vent zonal

3.4.1 Structure asymptotique de l'écoulement

Considérons maintenant la réponse non-linéaire du fluide au forçage de libration longitudinale. Cette correction du second ordre en ε^2 est générée par l'interaction non-linéaire de la solution au premier ordre avec elle-même. Notons tout d'abord que les interactions non-linéaires induites dans le volume par le pompage d'Ekman (solution à l'ordre $\varepsilon\sqrt{E}$) vont générer une correction à l'ordre $\varepsilon^2 E$. En pratique, ce terme est un ordre de grandeur plus faible que la

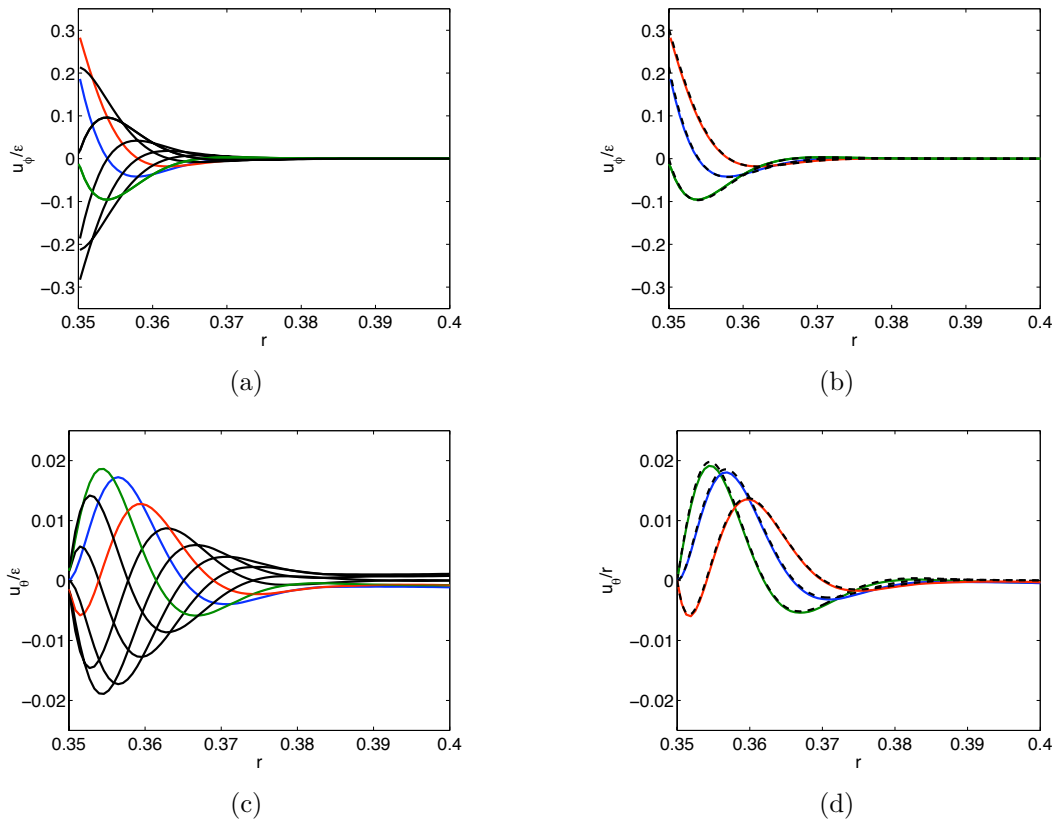


FIGURE 3.3 – Champs de vitesses pour la même configuration que la figure 3.2 près du noyau interne ($r = 0.35$).

correction moyenne obtenue dans la limite $E \rightarrow 0$. Nous allons voir dans la suite, que la contribution principale dans le volume provient en fait des interactions non-linéaires dans les couches limites et peut se mettre sous la forme :

$$\psi_2 \sim \sqrt{E} \bar{\psi}_2(r, \theta) \quad (3.16a)$$

$$\chi_2 \sim \bar{\chi}_2(r, \theta) \quad (3.16b)$$

où $\bar{\psi}_2$ et $\bar{\chi}_2$ sont tous deux indépendants du temps et du nombre d'Ekman E .

Les équations (3.3) et (3.4) impliquent que $\bar{\psi}_2$ et $\bar{\chi}_2$ vérifient, dans le volume, les équations

$$\left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \bar{\psi}_2 = 0 \quad \text{et} \quad \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \bar{\chi}_2 = 0. \quad (3.17)$$

Ces deux équations se réécrivent en coordonnées cylindrico-polaires (ρ, ϕ, z) :

$$\frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{\chi}_2}{\partial z} = 0. \quad (3.18)$$

De ces deux égalités, on obtient directement que, dans le volume, $\bar{\psi}_2$ et $\bar{\chi}_2$ dépendent uniquement de la coordonnée radiale $\rho = r \sin \theta$ et peuvent donc se mettre sous la forme

$$\bar{\psi}_2(r, \theta) = \Psi_2(\rho), \quad (3.19a)$$

$$\bar{\chi}_2(r, \theta) = \mathcal{X}_2(\rho). \quad (3.19b)$$

Cette propriété constitue simplement une conséquence du théorème de Taylor-Proudman (voir section 1.2.3).

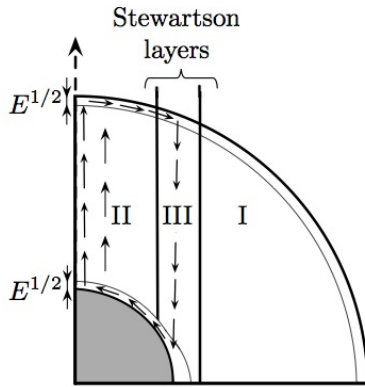


FIGURE 3.4 – Structure de l'écoulement dans une coquille en libration longitudinale montrant la présence de trois régions différentes.

Pour cela, on va introduire des couches imbriquées de différentes épaisseurs (région III) dans lesquelles les effets visqueux sont pris en compte. Ces couches possèdent la même structure que les couches de Stewartson (Stewartson, 1966).

Comme nous l'avons vu précédemment, les interactions non-linéaires de la solution à l'ordre ε vont générer des harmoniques 2ω et une composante stationnaire. Nous nous intéressons uniquement à l'écoulement moyen dans la suite, et donc à la composante stationnaire. Ainsi, nous ne noterons pas les barres sur les fonctions qui désigneront toutes la composante stationnaire du champ des vitesses (par exemple $\bar{\chi}_2$ sera noté χ_2).

Dans la suite, nous calculons l'écoulement dans les couches d'Ekman intérieure et extérieure. Puis, nous considérons la situation dans la région (I) où aucun écoulement axial n'est présent ; cette solution peut être utilisée dans une sphère. Pour finir, nous nous intéressons à l'écoulement induit dans le cylindre tangent défini par le noyau. La solution analytique de l'écoulement dans les couches de Stewartson est également donnée.

3.4.2 Solution dans la couche d'Ekman

Les équations du mouvement (3.3) et (3.4) pour la composante stationnaire dans la couche d'Ekman à l'ordre ε^2 s'écrivent à l'aide de la variable locale $\tilde{r} = (1 - r)/\sqrt{E}$:

$$\frac{\partial^4 \psi_2^{(o)}}{\partial \tilde{r}^4} + 2 \cos \theta \frac{\partial \chi_2^{(o)}}{\partial \tilde{r}} = NL_1^{(o)}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2 \chi_2^{(o)}}{\partial \tilde{r}^2} - 2 \cos \theta \frac{\partial \psi_2^{(o)}}{\partial \tilde{r}} = NL_2^{(o)}, \quad (3.21)$$

où $NL_1^{(o)}$ et $NL_2^{(o)}$ représentent la partie stationnaire du terme de forçage non-linéaire et sont données par :

$$NL_1^{(o)} = -\frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \left[\frac{\partial^2 \psi_1^{(o)}}{\partial \tilde{r}^2} \frac{\partial \psi_1^{(o)}}{\partial \tilde{r}} + \chi_1^{(o)} \frac{\partial \chi_1^{(o)}}{\partial \tilde{r}} \right] + \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial \psi_1^{(o)}}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial^3 \psi_1^{(o)}}{\partial \theta \partial \tilde{r}^2} - \frac{\partial \psi_1^{(o)}}{\partial \theta} \frac{\partial^3 \psi_1^{(o)}}{\partial \tilde{r}^3} \right], \quad (3.22)$$

$$NL_2^{(o)} = \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial \psi_1^{(o)}}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial \chi_1^{(o)}}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_1^{(o)}}{\partial \theta} \frac{\partial \chi_1^{(o)}}{\partial \tilde{r}} \right]. \quad (3.23)$$

A partir des équations (3.20) et (3.21), on obtient une équation différentielle du cinquième ordre pour $\psi_2^{(o)}$:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[\frac{\partial^4}{\partial \tilde{r}^4} + 4 \cos^2 \theta \right] \psi_2^{(o)} = \frac{\partial NL_1^{(o)}}{\partial \tilde{r}} - 2 \cos \theta NL_2^{(o)} = NL^{(o)} \quad (3.24)$$

Cette équation doit être résolue avec les conditions aux limites :

$$\psi_2^{(o)}(\tilde{r} = 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi_2^{(o)}}{\partial \tilde{r}}(\tilde{r} = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\tilde{r} \rightarrow +\infty} \psi_2^{(o)}(\tilde{r}) = \Psi_2(\sin \theta). \quad (3.25)$$

Les expressions de $NL^{(o)}$ et $NL_1^{(o)}$ sont assez lourdes. On peut cependant les écrire sous la forme compacte :

$$NL^{(o)} = \sum_{l=1}^5 [A_l(\theta) + \tilde{r} B_l(\theta)] e^{-\mu_l \tilde{r}} + c.c., \quad (3.26a)$$

$$NL_1^{(o)} = \sum_{l=1}^5 [C_l(\theta) + \tilde{r} D_l(\theta)] e^{-\mu_l \tilde{r}} + c.c., \quad (3.26b)$$

où les coefficients μ_l sont reliés à λ_{\pm} définis par (3.14) par les relations

$$\mu_1 = \lambda_+ + \lambda_-^*, \quad \mu_2 = \lambda_+ + \lambda_+^*, \quad \mu_3 = \lambda_- + \lambda_-^*, \quad \mu_4 = \lambda_+ \quad \text{et} \quad \mu_5 = \lambda_-. \quad (3.27)$$

Les expressions de $A_l(\theta)$, $B_l(\theta)$, $C_l(\theta)$ et $D_l(\theta)$ sont données en annexe (1.1).

L'équation différentielle (3.24) avec les conditions aux limites (3.25) admet pour solution

$$\psi_2^{(o)}(\tilde{r}, \theta) = \phi_2^{(o)}(\tilde{r}, \theta) + \Psi_2(\sin \theta) \left[1 - \frac{\kappa^* e^{-\kappa \tilde{r}} - \kappa e^{-\kappa^* \tilde{r}}}{\kappa^* - \kappa} \right] \quad (3.28)$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_2^{(o)}(\tilde{r}, \theta) = \sum_{l=1}^5 \left\{ -\frac{1}{4 \cos^2 \theta + \mu_l^4} \left[\frac{B_l + \mu_l A_l}{\mu_l^2} + \frac{4 \mu_l^2 B_l}{4 \cos^2 \theta + \mu_l^4} \right] \left[e^{-\mu_l \tilde{r}} + \frac{\mu_l - \kappa^*}{\kappa^* - \kappa} e^{-\kappa \tilde{r}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mu_l - \kappa}{\kappa - \kappa^*} e^{-\kappa^* \tilde{r}} \right] - \frac{B_l}{\mu_l (4 \cos^2 \theta + \mu_l^4)} \left[\tilde{r} e^{-\mu_l \tilde{r}} - \frac{e^{-\kappa \tilde{r}} - e^{-\kappa^* \tilde{r}}}{\kappa^* - \kappa} \right] \right\} + c.c. \quad (3.29) \end{aligned}$$

et où on a défini

$$\kappa = (1 + i) \sqrt{\cos \theta}. \quad (3.30)$$

Avec l'équation différentielle (3.20), on obtient $\chi_2^{(o)}$, qui doit satisfaire la condition de raccordement entre la couche d'Ekman et le volume

$$\lim_{\tilde{r} \rightarrow +\infty} \chi_2^{(o)}(\tilde{r}) = \mathcal{X}_2(\sin \theta). \quad (3.31)$$

Ceci conduit à l'expression

$$\chi_2^{(o)}(\tilde{r}, \theta) = -\frac{1}{2 \cos \theta} \left[\frac{\partial^3 \bar{\psi}_2^{(o)}}{\partial \tilde{r}^3} + \left\{ \sum_{l=1}^5 \left(\frac{D_l + \mu_l C_l}{\mu_l^2} + \frac{\tilde{r} D_l}{\mu_l} \right) e^{-\mu_l \tilde{r}} + c.c. \right\} \right] + \mathcal{X}_2(\sin \theta). \quad (3.32)$$

L'équation (3.32) ci-dessus satisfait la condition d'adhérence à la paroi, $\chi_2^{(o)}(\tilde{r} = 0, \theta) = 0$, si et seulement si Ψ_2 et \mathcal{X}_2 satisfont à la relation

$$\mathcal{X}_2(\sin \theta) = \mathcal{F}(\sin \theta; \omega) - 2\sqrt{\cos \theta} \Psi_2(\sin \theta) \quad (3.33)$$

où

$$\mathcal{F}(\sin \theta; \omega) = \frac{1}{2 \cos \theta} \left[\frac{\partial^3 \bar{\phi}_2^{(o)}}{\partial \tilde{r}^3} \right]_{\tilde{r}=0} + \left\{ \sum_{l=1}^5 \frac{D_l + \mu_l C_l}{\mu_l^2} + c.c. \right\} \quad (3.34)$$

L'équation (3.33) est obtenue à partir de la condition de raccordement entre la solution dans le volume et la solution dans la couche d'Ekman sur la sphère extérieure ($r = 1$). Une relation similaire est obtenue par un raisonnement identique dans la couche d'Ekman au voisinage du noyau interne ($r = a$). On obtient alors

$$\mathcal{X}_2(a \sin \theta) = \alpha^2 a^2 \mathcal{F}(\sin \theta; \omega) + 2\sqrt{\cos \theta} \Psi_2(a \sin \theta). \quad (3.35)$$

3.4.3 Correction non-linéaire dans le volume

Les relations (3.33) et (3.35) permettent d'obtenir les fonctions Ψ_2 et \mathcal{X}_2 qui caractérisent la correction stationnaire à l'écoulement à l'ordre dominant en Ekman dans le volume, i.e. le vent zonal.

On considère dans un premier temps la région I, définie par $\rho > a$ (figure 3.4). Dans cette région, la seule contribution provient des couches visqueuses au voisinage des parois de la sphère extérieure. Cependant, l'écoulement dans cette région doit également satisfaire une condition de symétrie à l'équateur : l'écoulement axial doit être antisymétrique par rapport à l'équateur et doit donc s'annuler en $z = 0$. Puisque l'écoulement axial ne dépend pas de la coordonnée axiale

z , cette condition implique qu'il doit être nul partout dans la région I. En d'autres termes, on peut écrire

$$\Psi_2(\rho) = 0, \quad (3.36)$$

égalité à partir de laquelle on déduit, avec la relation (3.33), que pour $\rho > a$ (c'est-à-dire dans la région I) :

$$\mathcal{X}_2(\rho) = \mathcal{F}(\rho; \omega). \quad (3.37)$$

Dans la région II, on doit considérer à la fois les conditions de raccordement avec les couches visqueuses intérieure et extérieure. Remplaçons $\sin \theta$ par ρ dans la relation (3.33) et $a \sin \theta$ par ρ dans la relation (3.35). Ceci nous conduit alors à

$$\mathcal{X}_2(\rho) = -2 [1 - \rho^2]^{1/4} \Psi_2(\rho) + \mathcal{F}(\rho; \omega), \quad (3.38a)$$

$$\mathcal{X}_2(\rho) = 2 [1 - (\rho/a)^2]^{1/4} \Psi_2(\rho) + \alpha^2 a^2 \mathcal{F}(\rho/a; \omega), \quad (3.38b)$$

A partir de cette expression, on en déduit que pour $\rho < a$ (c'est-à-dire dans la région II)

$$\Psi_2(\rho) = \frac{\mathcal{F}(\rho; \omega) - \alpha^2 a^2 \mathcal{F}(\rho/a; \omega)}{2(1 - \rho^2)^{1/4} + 2[1 - (\rho/a)^2]^{1/4}}, \quad (3.39a)$$

$$\mathcal{X}_2(\rho) = \frac{\alpha^2 a^2 (1 - \rho^2)^{1/4} \mathcal{F}(\rho/a; \omega) + [1 - (\rho/a)^2]^{1/4} \mathcal{F}(\rho; \omega)}{(1 - \rho^2)^{1/4} + [1 - (\rho/a)^2]^{1/4}}. \quad (3.39b)$$

A l'aide de l'expression (3.2), on peut également calculer, à partir de Ψ_2 et $\bar{\chi}_2$, la composante azimutale du vent zonal, u_{ϕ_2} , la composante axiale u_{z_2} ainsi que la composante stationnaire de la vorticité axiale ω_{z_2} . Ces grandeurs sont données dans les régions I et II par

$$u_{\phi_2} = \frac{\mathcal{X}_2}{\rho}, \quad u_{z_2} = \frac{\sqrt{E}}{\rho} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \rho}, \quad \text{et} \quad \omega_{z_2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{X}_2}{\partial \rho}. \quad (3.40)$$

Notons que les expressions (3.39a,b) sont similaires aux expressions obtenues par Proudman (1956) pour l'écoulement entre deux sphères en rotation à des vitesses angulaires différentes. La différence se situe dans le numérateur qui est maintenant une fonction plus complexe associée aux interactions non-linéaires de l'écoulement généré dans les couches d'Ekman par le forçage de libration longitudinale. Cependant, comme dans le calcul de Proudman (1956), Ψ_2 et \mathcal{X}_2 présentent une discontinuité à la traversée du cylindre tangent au noyau intérieur, i.e. en $\rho = a$. En particulier, on peut noter que

$$\mathcal{X}_2(\rho) \underset{\rho \rightarrow a^+}{\sim} \mathcal{X}^+ = \mathcal{F}(a; \omega), \quad (3.41a)$$

$$\mathcal{X}_2(\rho) \underset{\rho \rightarrow a^-}{\sim} \mathcal{X}^- = \alpha^2 a^2 \mathcal{F}(1; \omega) = \frac{\alpha^2 a^2}{4\omega^2}. \quad (3.41b)$$

La singularité en $\rho = a$ de ces deux fonctions, Ψ_2 et \mathcal{X}_2 , peut être lissée à travers une série de couches visqueuses dans le volume comme montré initialement par Stewartson (1966) pour l'écoulement entre deux sphères en rotation à des vitesses angulaires différentes. Dans la suite, nous fournissons des approximations de la solution dans ces couches visqueuses.

Il convient de signaler que la solution obtenue dans la région II peut en fait être déduite directement de la solution dans la région I. En d'autres termes, si on exclut la solution dans les couches de Stewartson, que nous allons détailler dans la suite, l'écoulement généré dans

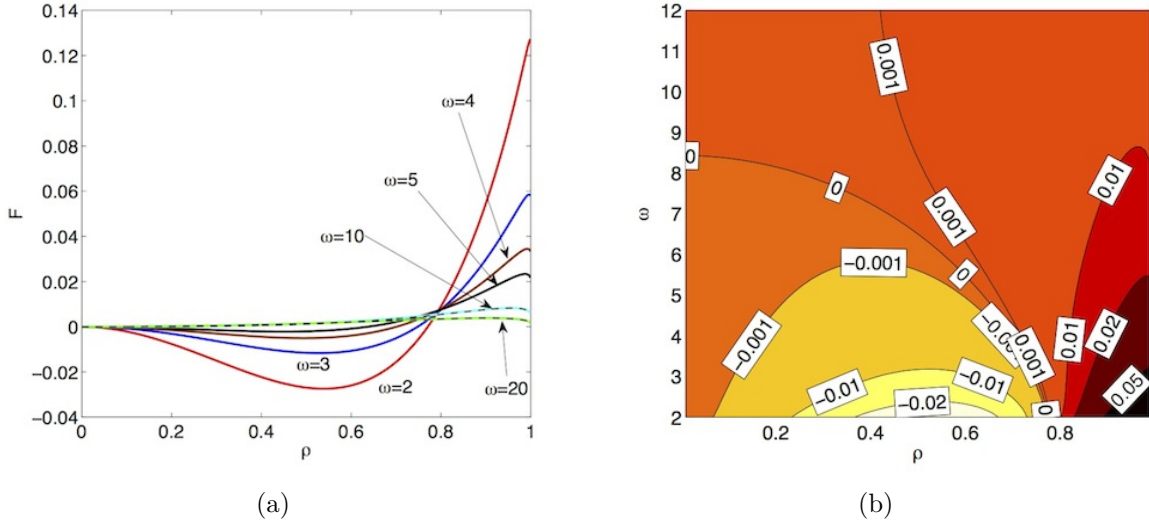


FIGURE 3.5 – (a) Représentation graphique de $\mathcal{F}(\rho; \omega)$ en fonction de ρ pour différentes valeurs de la fréquence de libration ω . Cette fonction caractérise Ψ_2 et \mathcal{X}_2 dans le volume. L'expression (3.42) est tracée en pointillés pour $\omega = 10$ et $\omega = 20$. (b) Contours de la fonction $\mathcal{F}(\rho; \omega)$ dans le plan (ρ, ω) .

une coquille sphérique peut être déduit de la solution dans une sphère. En effet, toutes les informations nécessaires sont contenues dans la fonction $\mathcal{F}(\rho; \omega)$ qui définit la fonction \mathcal{X}_2 dans la région I (ou dans une sphère). Malheureusement, nous n'avons pas été capable d'obtenir une expression simple de cette fonction [formule (A.14) fournie en annexe 1.2].

La figure 3.5(a) représente $\mathcal{F}(\rho; \omega)$ en fonction de ρ pour différentes valeurs de la fréquence de libration ω . Les contours de la fonction $\mathcal{F}(\rho; \omega)$ dans le plan (ρ, ω) sont également représentés en figure 3.5. De manière intéressante, la fonction $\mathcal{F}(\rho; \omega)$ change de signe lorsque ρ varie pour $\omega < 8.5$. Ceci signifie que la correction stationnaire axisymétrique générée par libration longitudinale peut être anticyclonique proche de l'axe et cyclonique plus loin.

Pour de grandes fréquences de libration, $\omega \gg 1$, une expression asymptotique de $\mathcal{F}(\rho; \omega)$ peut être obtenue dans la limite $\omega \rightarrow +\infty$

$$\mathcal{F}(\rho; \omega) \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\rho^2 \sqrt{1 - \rho^2}}{4\omega} - \frac{\sqrt{2} \rho^2 (1 - \rho^2)^{3/4}}{4\omega^{3/2}} + \frac{\rho^2 (7\rho^2 - 5)}{4\omega^2} + o\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \quad (3.42)$$

à partir de laquelle on peut facilement obtenir le comportement de \mathcal{X}_2 , u_{ϕ_2} , Ψ_2 et u_{z_2} . En pratique, cette relation (3.42) fournit une très bonne approximation de $\mathcal{F}(\rho; \omega)$ pour $\omega = 10$ et pour de plus grandes valeurs de ω comme illustré sur la figure 3.5(a).

Au voisinage de $\rho = 0$, la fonction $\mathcal{F}(\rho; \omega)$ peut être reliée à l'expression obtenue pour la libration longitudinale d'un cylindre (Wang, 1970). Nous reviendrons plus en détails sur ceci dans le chapitre suivant, mais on peut noter que l'on a dans ce cas $\mathcal{F} \sim \Omega_{Cyl}(\omega) \rho^2$ quand $\rho \rightarrow 0$ ce qui conduit à

$$\mathcal{X}_2 \underset{\rho \rightarrow 0}{\sim} \frac{(\alpha^2 + 1)}{2} \Omega_{Cyl}(\omega) \rho^2. \quad (3.43)$$

La fonction $\Omega_{Cyl}(\omega)$ correspond à la vitesse angulaire moyenne générée par la libration longitudinale d'un cylindre. Cette expression a été obtenue initialement par Wang (1970) (voir également Sauret *et al.*, 2012a). Notons l'expression simple pour la fonction \mathcal{F} en $\rho = 1$: $\mathcal{F}(1, \omega) = 1/(4\omega^2)$.

Il est intéressant de donner l'expression des fonctions Ψ_2 et \mathcal{X}_2 dans la limite d'un faible espacement entre le noyau et la couche externe, c'est-à-dire dans la limite où la taille du noyau tend vers celle de la sphère extérieure ($a \rightarrow 1$) :

$$\Psi_2 \sim (1 - \alpha^2) \frac{\mathcal{F}(\rho; \omega)}{4(1 - \rho^2)^{1/4}} + O(1 - a), \quad (3.44a)$$

$$\mathcal{X}_2 \sim \frac{1 + \alpha^2}{2} \mathcal{F}(\rho; \omega). \quad (3.44b)$$

L'expression (3.44a) implique que Ψ_2 devient petit d'ordre $(1 - a)$ quand la sphère extérieure et le noyau interne oscillent à la même amplitude ($\alpha^2 = 1$). L'expression (3.44b) signifie que la dépendance de la fonction \mathcal{X}_2 avec la coordonnée radiale ρ est la même que pour une sphère.

3.4.4 Solution dans les couches de Stewartson

La structure dans les couches visqueuses est la même que dans le cas traité par Stewartson (1966) et est représentée schématiquement ci-contre, figure 3.6. Trois différentes couches sont localisées autour de $\rho = a$: deux couches externes ayant pour échelle $|\rho - a| = O(E^{1/4})$, pour $\rho > a$, et $|\rho - a| = O(E^{2/7})$, pour $\rho < a$, et une couche interne ayant pour échelle $|\rho - a| = O(E^{1/3})$. Comme l'a démontré Stewartson (1966), les couches extérieures garantissent la continuité de \mathcal{X}_2 (et donc de u_{ϕ_2}) et de sa première dérivée, alors que la couche interne permet de lisser la discontinuité de Ψ_2 (et de u_{z_2}) ainsi que les dérivées supérieures de \mathcal{X}_2 . Dans ce chapitre, nous donnons seulement la solution à l'ordre dominant dans chaque couche. Afin de ne pas surcharger de calculs ce chapitre et nous concentrer sur le sens physique des résultats, nous expliquons en annexe 2 comment l'ordre suivant, qui varie comme $O(E^{1/28})$, peut être calculé.

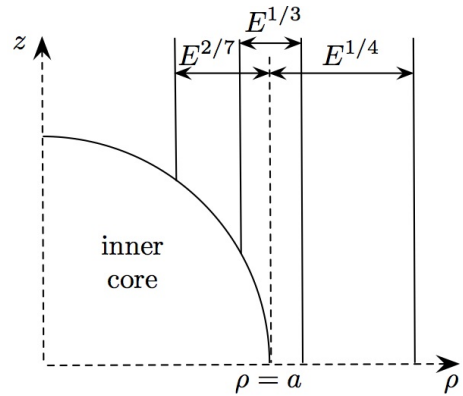


FIGURE 3.6 – Structure des couches de Stewartson. La couche interne a une épaisseur $E^{1/3}$ et les couches externes ont une épaisseur $E^{1/4}$ et $E^{2/7}$.

Dans les couches extérieures, des expressions simples peuvent être obtenues. En effet, dans la couche externe située en $\rho > a$, \mathcal{X}_2 varie exponentiellement entre les valeurs de \mathcal{X}_2 de part et d'autre du cylindre tangent, situé en $\rho = a$: $\mathcal{X}^\pm = \lim_{\rho \rightarrow a^\pm} \mathcal{X}_2(\rho)$. On a alors

$$\mathcal{X}_2 \sim \mathcal{X}^+(1 - e^{-\tilde{\rho}}) + \mathcal{X}^- e^{-\tilde{\rho}}, \quad (3.45)$$

où on a introduit la variable

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho - a}{(1 - a^2)^{3/8} E^{1/4}}. \quad (3.46)$$

Dans la couche externe située en $\rho < a$, la fonction \mathcal{X}_2 reste constante, ce qui s'écrit

$$\mathcal{X}_2 \sim \mathcal{X}^-. \quad (3.47)$$

La fonction \mathcal{X}_2 (et par conséquent la composante azimuthale du vent zonal, u_{ϕ_2}) est donc du même ordre de grandeur dans les couches de Stewartson et dans le volume.

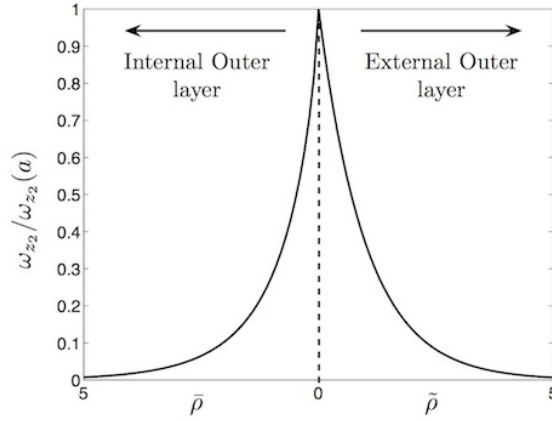


FIGURE 3.7 – Vorticité axiale $\omega_{z_2}/\omega_{z_2}(a)$ en fonction de $\bar{\rho} = (a - \rho) [a/(2E^2)/(1 - a^2)^2]^{1/7}$ pour $\rho < a$ (couche externe à gauche), et $\tilde{\rho} = (\rho - a)/[(1 - a^2)^{3/8} E^{1/4}]$ pour $\rho > a$ (couche externe à droite).

A l’opposé, la vorticité associée à la correction stationnaire est plus grande dans les couches externes que dans le volume. Plus précisément, la contribution la plus importante provient de la composante axiale de la vorticité, notée ω_{z_2} . Elle a pour expression

$$\omega_{z_2} \sim E^{-1/4} \frac{\delta\mathcal{X}}{a(1 - a^2)^{3/8}} e^{-\tilde{\rho}} \quad \text{dans la couche externe avec } \rho > a, \quad (3.48a)$$

$$\omega_{z_2} \sim E^{-1/4} \frac{\delta\mathcal{X}}{a(1 - a^2)^{3/8}} \frac{\mathbf{f}'(\bar{\rho})}{\mathbf{f}'(0)} \quad \text{dans la couche externe avec } \rho < a, \quad (3.48b)$$

où la variable $\bar{\rho}$ de la couche externe avec $\rho < a$, est définie par

$$\bar{\rho} = (a - \rho) \left[\frac{a}{2E^2(1 - a^2)^2} \right]^{1/7}. \quad (3.49)$$

Le détail du calcul et l’expression de la fonction en termes de fonctions de Bessel, \mathbf{f} , est donné en annexe [voir l’expression (A.33)]. Nous avons tracé la vorticité axiale dans chaque couche externe ($\rho < a$ et $\rho > a$) normalisée par sa valeur en $\rho = a$, $\omega_{z_2}/\omega_{z_2}(a)$, en figure 3.7. On peut noter que la vorticité est fortement piquée en $\rho = a$ où elle atteint son maximum (en amplitude) et a pour valeur

$$\omega_{z_2}(a) = E^{-1/4} \frac{\delta\mathcal{X}}{a(1 - a^2)^{3/8}}. \quad (3.50)$$

La singularité de la vorticité axiale en $\rho = a$ est lissée dans la couche interne d’épaisseur $E^{1/3}$.

Contrairement à la vitesse azimutale et à la vorticité axiale, la fonction Ψ_2 et la vitesse axiale u_{z_2} dépendent de la variable axiale z à l’ordre dominant. Cette dépendance est linéaire dans les couches extérieures [voir les expressions (A.25) et (A.35) en annexe 2] mais est plus complexe dans la couche intérieure. C’est dans cette couche intérieure, où $|\rho - a| = O(E^{1/3})$, que les valeurs de Ψ_2 et u_{z_2} sont les plus grandes. Ces deux fonctions varient respectivement comme $\Psi_2 = O(E^{19/42})$ et $u_{z_2} = O(E^{5/42})$. Notons en particulier que la vitesse axiale est beaucoup plus importante que dans la région II où elle est d’ordre $O(\sqrt{E})$. Malheureusement, les expressions de Ψ_2 et u_{z_2} ne sont pas aussi simples que celle de \mathcal{X}_2 . Dans la couche intérieure ($|\rho - a| = O(E^{1/3})$),

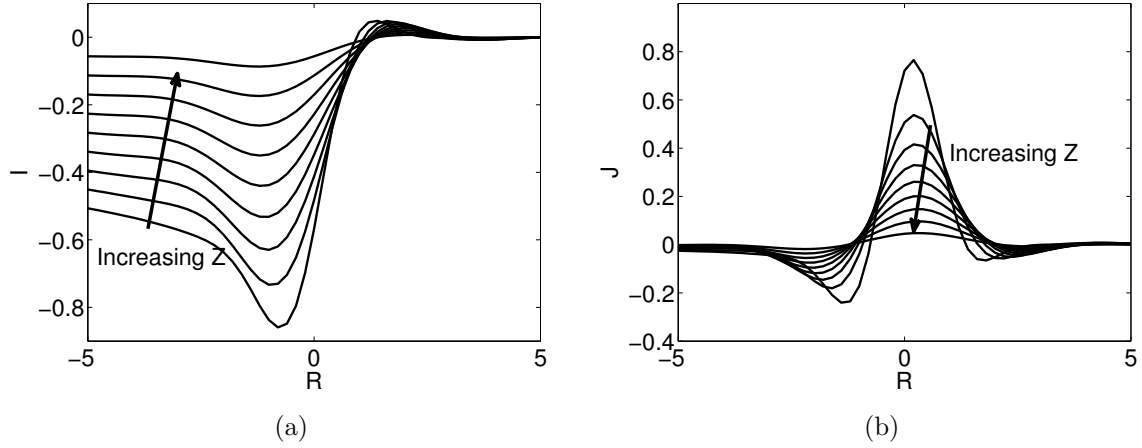


FIGURE 3.8 – Représentation graphique des fonctions (a) $\mathbf{I}(Z, R)$ et (b) $\mathbf{J}(Z, R)$ en fonction de R pour différentes valeurs de Z ($Z = 0.1 : 0.1 : 0.9$). Ces deux fonctions caractérisent respectivement la variation spatiale dans la couche intérieure de Ψ_2 et u_{z_2} .

Ψ_2 et u_{z_2} se mettent sous la forme

$$\Psi_2 \sim E^{19/42} \Lambda_3(a, \omega) \mathbf{I} \left(\frac{z}{\sqrt{1-a^2}}, \frac{\rho-a}{E^{1/3}(1-a^2)^{1/6}} \right), \quad (3.51)$$

$$u_{z_2} \sim E^{5/42} \Lambda_4(a, \omega) \mathbf{J} \left(\frac{z}{\sqrt{1-a^2}}, \frac{\rho-a}{E^{1/3}(1-a^2)^{1/6}} \right), \quad (3.52)$$

où \mathbf{I} et \mathbf{J} sont des fonctions données en annexe 2. Les fonctions Λ_3 et Λ_4 sont reliées à $\delta\mathcal{X} = \mathcal{X}^+ - \mathcal{X}^- = \mathcal{F}(a; \omega) - \alpha^2 a^2 / (4\omega^2)$ par

$$\Lambda_3(a; \omega) = \frac{\alpha_o a^{3/28}}{(1-a^2)^{11/84}} \delta\mathcal{X}(a; \omega), \quad (3.53)$$

$$\Lambda_4(a; \omega) = \frac{\alpha_o}{a^{25/28}(1-a^2)^{25/84}} \delta\mathcal{X}(a; \omega), \quad (3.54)$$

avec $\alpha_o = -1/[2^{6/7} \mathbf{f}'(0)] \simeq 0.45$.

Les variations des fonctions $\mathbf{I}(Z, R)$ et $\mathbf{J}(Z, R)$ par rapport à R à différentes hauteurs Z sont montrées en figures 3.8(a) et 3.8(b). Notons que les deux fonctions sont maximum pour les petites valeurs de Z , c'est-à-dire proche de l'équateur et du noyau interne. Il est également intéressant de noter, à l'aide de la figure 3.8(b), la forme particulière du profil de vitesse axiale qui est composé d'un jet principal entouré de deux jets d'amplitudes plus faibles se propageant dans la direction opposée.

Pour finir, il est important de souligner que Ψ_2 , u_{z_2} et ω_{z_2} dépendent de ω et α uniquement à travers la fonction $\delta\mathcal{X}$ et sont toutes proportionnelles à cette fonction. Quand le noyau interne n'oscille pas, $\alpha = 0$, et $\delta\mathcal{X}$ se réduit à la fonction $\mathcal{F}(a, \omega)$ qui a été représentée sur la figure 3.5(b). Notons également que la libration longitudinale du noyau interne réduit la contribution de la sphère extérieure par une quantité $\alpha^2 a^2 / (4\omega^2)$. Si seul le noyau interne est en libration (la sphère extérieure n'oscille pas) et si nous utilisons ε comme amplitude de libration du noyau interne, la contribution du noyau interne s'écrit $\delta\mathcal{X} = -a^2 / (4\omega^2)$.

Cette fonction est tracée dans le plan (a, ω) sur la figure 3.9(a). Cette figure, qui décrit la contribution du noyau interne, doit être comparée avec celle obtenue pour la contribution

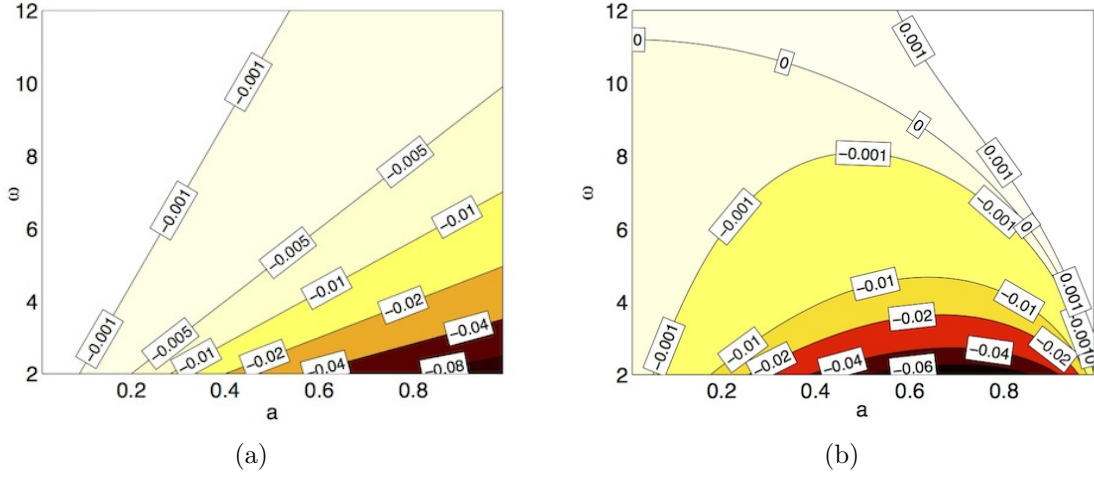


FIGURE 3.9 – Contour de la fonction $\delta\bar{\chi}(a, \omega)$ dans le plan (a, ω) . (a) quand seule la sphère intérieure libre ($\delta\bar{\chi}(a, \omega) = -a^2/(4\omega^2)$). (b) quand les deux sphères oscillent à la même amplitude ($\alpha = 1$).

de la sphère extérieure montrée en figure 3.5(b). Il apparaît que la contribution de la sphère intérieure est toujours du même signe quelles que soient les valeurs de a et ω : par conséquent, la libration du noyau interne génère toujours une vorticité axiale moyenne négative (anticyclonique) et l'écoulement axial moyen va de la sphère extérieure vers le noyau interne.

Nous avons représenté sur la figure 3.9(b) les variations de $\delta\mathcal{X}$ par rapport à chacune des deux variables a et ω quand le noyau interne et la sphère extérieure oscillent à la même amplitude ($\alpha = 1$). Si l'on compare cette figure avec la figure 3.5(b), on observe que le noyau interne a une contribution non-négligeable dès lors que le rayon a du noyau interne n'est pas trop petit. En particulier, cela augmente fortement le domaine de paramètres où la vorticité axiale moyenne est anticyclonique.

3.5 Limite des faibles fréquences de libration $\omega \rightarrow 0$

Nous avons établi dans ce chapitre l'expression du vent zonal généré par un forçage de libration de fréquence $\omega > 2$. Néanmoins le calcul effectué peut également s'appliquer pour $\omega < 2$. En particulier, la limite des faibles fréquences de libration, $\omega \ll 1$ est intéressante car les modes inertiels excités à basses fréquences sont généralement trop amortis pour être excités de manière résonante. De plus, pour les petites valeurs de ω , les zones de cisaillement dans le volume sont limitées au voisinage de l'équateur et au voisinage du cylindre tangent au noyau interne, c'est-à-dire dans les couches de Stewartson. Par conséquent, ces zones sont disjointes des régions I et II dans le volume où on s'attend à ce que notre solution s'applique. Busse (2010a) a déterminé, dans un papier récent, l'expression analytique du vent zonal généré dans une sphère de rayon R remplie d'un fluide homogène et incompressible et soumise à un forçage de libration longitudinale. En utilisant nos notations, l'expression analytique du vent zonal obtenu par Busse (2010a) dans la limite

$$\sqrt{E} \ll \omega \ll \varepsilon \ll 1, \quad (3.55)$$

s'écrit

$$\mathcal{F}(\rho) \sim \frac{(51.8\rho^2 - 72)\rho^2}{480(1 - \rho^2)}. \quad (3.56)$$

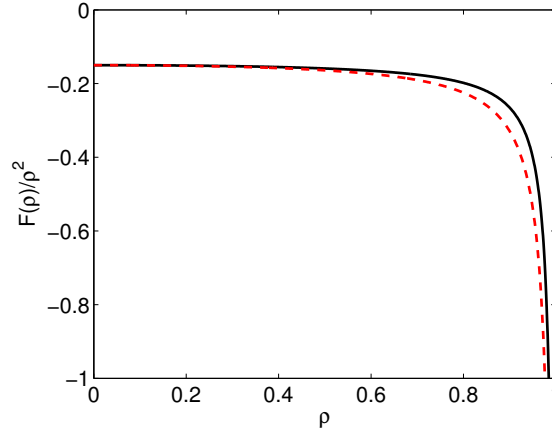


FIGURE 3.10 – Représentation graphique de la vitesse angulaire associée au vent zonal, $\mathcal{F}(\rho; \omega)/\rho^2$, en fonction de ρ dans la limite $\omega \rightarrow 0$. La ligne noire continue est la solution obtenue dans notre calcul alors que la ligne rouge en tirets est l'expression (3.56) obtenue par Busse (2010a).

On peut noter que cette expression est différente de celle que l'on obtient avec notre calcul en prenant la limite $\omega \rightarrow 0$. Dans notre cas, l'expression (A.16) se réduit à

$$\mathcal{F}(\rho) \sim \frac{(59\rho^2 - 72)\rho^2}{480(1 - \rho^2)}. \quad (3.57)$$

Ces deux expressions sont légèrement différentes. Ceci s'explique car l'expression (3.57) est valide pour $\varepsilon \ll \omega \ll 1$ alors que l'expression obtenue par Busse s'applique pour $\omega \ll \varepsilon$. Comme on peut le remarquer en figure 3.10, la différence entre ces deux expressions est particulièrement notable pour $\rho > 0.7$. Notons que les deux solutions divergent pour $\rho = 1$ du fait de la présence d'une latitude critique à l'équateur et on ne peut considérer le calcul comme valide que loin de l'équateur où les deux solutions sont proches.

3.6 Discussion et validité pour $\omega \in [0; 2]$

Nous avons considéré jusqu'à maintenant des fréquences de libration plus grandes que deux fois la vitesse angulaire de la coquille sphérique. Nous pouvons naturellement nous poser la question de savoir ce qu'il va se passer quand la fréquence est plus petite que deux fois la vitesse de rotation. La première difficulté vient du fait que des modes inertiels peuvent être excités de manière résonante par le forçage harmonique (voir par exemple Morize *et al.*, 2010; Tilgner, 2007). Quand ceci se produit, l'écoulement zonal est fortement modifié et n'est plus dominé par les interactions non-linéaires dans les couches limites (Sauret *et al.*, 2012a). Nous discuterons plus de ce point en section 8. La seconde difficulté vient du comportement singulier de la solution de couche limite quand le cosinus de l'angle en un point est égal à la fréquence d'oscillation. Cette singularité est connue pour générer des zones de cisaillement dans le volume (voir Kerswell, 1995; Kida, 2011). Ces effets induits par la latitude critique restent toujours à quantifier pour l'écoulement zonal.

Si nous négligeons les effets de telles zones de cisaillement interne et que nous supposons que nous n'avons pas de résonance, l'écoulement moyen peut être calculé en utilisant la même approche que pour $\omega > 2$. Les expressions (3.36, 3.37) et (3.39a,b) pour Ψ_2 et \mathcal{X}_2 s'appliquent

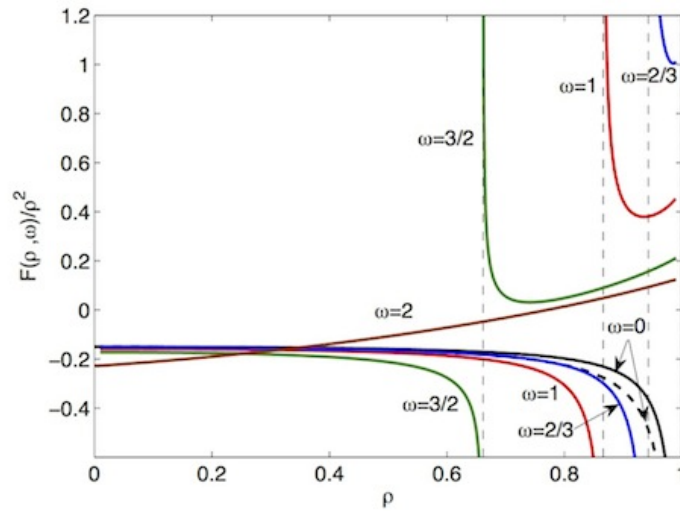


FIGURE 3.11 – Représentation graphique de $\mathcal{F}(\rho; \omega)/\rho^2$ en fonction de ρ pour différentes valeurs de ω entre 0 et 2. La fonction \mathcal{F} diverge en $\rho_c = \sqrt{1 - \omega^2/4}$. Les expressions (A.14) et (A.16) ont été utilisées pour tracer \mathcal{F} pour $\omega > 0$. La courbe en pointillés pour $\omega = 0$ est l'expression (3.56) obtenue par Busse (2010a).

toujours, mais l'expression (A.14) pour $\mathcal{F}(\rho; \omega)$ obtenue pour $\omega > 2$ peut uniquement être utilisée pour $\rho > \rho_c = \sqrt{1 - \omega^2/4}$. Pour $\rho < \rho_c$, l'expression (A.16) doit être utilisée. Cette expression est obtenue avec la même analyse en changeant la définition de la racine carrée dans (3.14). Les deux expressions divergent en ρ_c ce qui correspond au rayon à la latitude critique sur la sphère extérieure. Dans une coquille sphérique, cette singularité de \mathcal{F} conduit à deux singularités pour \mathcal{X}_2 . La seconde singularité est associée à la latitude critique sur la sphère intérieure en $\rho_c = a\sqrt{1 - \omega^2/4}$. D'un point de vue asymptotique, ces singularités signifient qu'une autre échelle de longueur doit être trouvée pour \mathcal{X}_2 au voisinage de chaque singularité.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé l'écoulement moyen induit par libration longitudinale, i.e. des petites oscillations du taux de rotation, dans une coquille sphérique et dans une sphère, quand la fréquence d'oscillation est supérieure à deux fois la vitesse de rotation moyenne ou dans la limite des faibles fréquences de libration $\omega \rightarrow 0$. A l'aide de méthodes asymptotiques dans la limite des petits nombres d'Ekman E et des petites amplitudes d'oscillation ε , nous avons démontré que la contribution principale à l'écoulement stationnaire est, dans le volume, un écoulement azimuthal variant comme le carré de l'amplitude de libration ε^2 , qui reste indépendant du nombre d'Ekman et dépend uniquement de la variable cylindrique ρ . Ce vent zonal est généré par des interactions non-linéaires de la solution harmonique dans les couches limites. La dépendance du vent zonal par rapport à la fréquence de libration ω et l'influence du rapport d'aspect du noyau a a été analysée. En particulier, nous avons vu que le vent zonal dans une coquille peut se déduire du vent zonal dans une sphère. Nous avons vu que pour des fréquences de libration modérées, $2 < \omega < 8.5$, une rotation moyenne à la fois cyclonique et anticyclonique peut être générée par la libration, alors que seule une faible rotation cyclonique est créée pour $\omega > 8.5$. De plus, la présence d'un noyau interne crée une discontinuité de l'écoulement azimuthal

à la traversée du cylindre tangent en $\rho = a$ qui est amortie dans une série de couches visqueuses imbriquées d'épaisseur $E^{1/4}$, $E^{2/7}$ et $E^{1/3}$, comme dans le cas de deux sphères concentriques en rotation à des vitesses différentes (Stewartson, 1966). La correction moyenne à l'écoulement a été calculée dans chacune de ces couches. Nous avons vu qu'un champ de vitesses axial d'ordre $\varepsilon^2 E^{-1/4}$ est généré dans les couches de Stewartson externes et qu'un champ de vitesses axial non-uniforme d'ordre $\varepsilon^2 E^{5/42}$ est présent dans la couche interne ($|\rho - a| = O(E^{1/3})$). La structure spatiale de ces deux grandeurs dans les couches de Stewartson est décrite par des fonctions universelles qui ne dépendent d'aucun paramètre, après un redimensionnement. Le rapport d'aspect du noyau, la fréquence d'oscillation de même que l'amplitude d'oscillation relative de la sphère intérieure interviennent uniquement dans un facteur d'amplitude qui a été totalement caractérisé. En particulier, nous avons démontré que la libration de la sphère intérieure rajoute une quantité simple au facteur d'amplitude obtenu sans le noyau interne, qui tend toujours à augmenter la contribution anticyclonique du champ de vorticit   et    ajouter un   coulement axial du noyau interne    la sph  re ext  rieure.

Chapitre

4

Vent zonal induit par forçage harmonique : validation et extrapolation

It doesn't matter how beautiful your theory is, it doesn't matter how smart you are. If it doesn't agree with experiment, it's wrong.

Richard Feynman

Sommaire du chapitre

4.1	Vent zonal en géométrie sphérique	72
4.1.1	Vent zonal dans une sphère pour $\omega \rightarrow 0$	72
4.1.2	Vent zonal dans une sphère pour $\omega > 2$	76
4.1.3	Comparaison numérique dans une coquille sphérique	78
4.2	Libration longitudinale en géométrie axisymétrique	81
4.2.1	De la sphère au sphéroïde	81
4.2.2	Libration longitudinale d'un cylindre axisymétrique	83
4.3	Analogie entre forçage temporel et forçage azimutal	88
4.3.1	Dispositif expérimental équivalent	88
4.3.2	Formulation mathématique	89
4.3.3	Discussion	89
4.4	Libration longitudinale d'un conteneur non-axisymétrique	90
4.4.1	Formulation mathématique	91
4.4.2	Méthode expérimentale	92
4.4.3	Résultats et comparaisons	94
4.4.4	Étude numérique	97
4.4.5	Discussion	100
4.5	Conclusion	101

Après avoir étudié théoriquement le vent zonal généré par un forçage de libration longitudinale au chapitre précédent, nous validons ici la solution obtenue. Dans la section 4.1, nous étudions l'écoulement non-linéaire généré dans une sphère dans la limite des faibles fréquences de libration à l'aide d'expériences et de simulations numériques. Puis nous comparons des résultats numériques à la solution trouvée pour une fréquence arbitraire de libration dans une sphère puis dans une coquille sphérique. La section 4.2 illustre que la solution trouvée précédemment est robuste et peut évaluer l'écoulement non-linéaire dans un sphéroïde ou dans un cylindre. Un aspect intéressant du vent zonal généré par un forçage harmonique est discuté dans la section

4.3 où nous montrons qu'un forçage azimutal, par exemple de marées, génère un écoulement dont les caractéristiques sont similaires à celles obtenues dans le chapitre précédent. Le détail de ce calcul est présenté en annexe en fin de chapitre. Finalement, une étude expérimentale de [Noir et al. \(2012\)](#), nous a permis de confronter notre étude théorique au cas de la libration d'un conteneur non-axisymétrique. Les résultats et les futurs axes de recherche sont discutés en section 4.4.

4.1 Vent zonal en géométrie sphérique

Dans cette section, nous comparons les résultats analytiques obtenus par notre approche perturbative aux résultats expérimentaux et numériques obtenus dans une sphère en rotation soumis à un forçage de libration longitudinale. Nous considérons ensuite le cas de la coquille sphérique, qui nécessite des nombres d'Ekman plus faibles, à l'aide de résultats numériques obtenus par [Calkins et al. \(2010\)](#). Nous étudions la dépendance des différents paramètres du problème : la fréquence de libration ω , le nombre d'Ekman E ainsi que l'amplitude de libration ε . Du fait des limitations techniques de notre dispositif expérimental, nous nous intéressons expérimentalement uniquement au régime des faibles fréquences de libration, $\omega \rightarrow 0$. Dans tout le chapitre nous désignons par u_ϕ la vitesse azimutale du vent zonal et Ω_2 le taux de rotation associé. Ces deux grandeurs sont respectivement liées à la fonction $\mathcal{F}(\rho)$ par

$$u_\phi = \varepsilon^2 \frac{\mathcal{F}(\rho)}{\rho} \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \varepsilon^2 \frac{\mathcal{F}(\rho)}{\rho^2}. \quad (4.1)$$

où ρ désigne le rayon en coordonnées cylindriques.

4.1.1 Vent zonal dans une sphère pour $\omega \rightarrow 0$

Intéressons nous, dans un premier temps, au cas particulier où le rapport de la fréquence de libration longitudinale et de la vitesse de rotation est faible ($\omega \rightarrow 0$). Nous nous assurons également que nous travaillons dans la limite où le produit de la fréquence de libration et du temps de spin-up est grand, $\sqrt{E} \ll \omega$. Pour vérifier le résultat analytique dans cette limite, nous effectuons des mesures par vélocimétrie par images de particules avec le dispositif expérimental décrit en section 2.2. Du fait des limitations techniques et des effets optiques intrinsèques au dispositif expérimental (annexe C), l'incertitude sur les mesures est assez importante ce qui nous conduit à utiliser également le modèle numérique axisymétrique présenté en section 2.3. Dans la limite $\omega \rightarrow 0$, le calcul effectué au chapitre précédent conduit à

$$\mathcal{F}(\rho) \sim \frac{(59\rho^2 - 72)\rho^2}{480(1 - \rho^2)}. \quad (4.2)$$

Néanmoins, dans cette partie, nous comparons les résultats expérimentaux et numériques à l'expression obtenue par [Busse \(2010a\)](#) dans la limite $\sqrt{E} \ll \omega \ll \varepsilon \ll 1$:

$$\mathcal{F}(\rho) \sim \frac{(51,8\rho^2 - 72)\rho^2}{480(1 - \rho^2)}. \quad (4.3)$$

En effet, ces deux solutions sont similaires dans la région étudiée, i.e. pour $\rho < 0,6$.

Notons que l'expression théorique (4.3) représente la différence de vitesse angulaire (à un facteur ρ^2 près) entre la paroi de la sphère et le fluide, normalisée par l'amplitude de libration au carré, ε^2 . Cette vitesse angulaire associée au vent zonal est négative dans la limite $\omega \rightarrow 0$.

Dans le référentiel en rotation à la vitesse angulaire moyenne, ceci signifie que le fluide tourne dans le volume dans la direction rétrograde. De plus, cette rotation différentielle est quasiment constante jusqu'à $r \sim 0,6$ avec une valeur moyenne de $-0,154$. L'écoulement zonal peut alors être assimilé dans le volume à une rotation solide rétrograde superposée à la rotation moyenne. Pour définir une méthode reproductible afin de synthétiser les données numériques et expérimentales, nous prendrons la valeur moyenne du taux de rotation u_ϕ/ρ mesuré entre $\rho = 0,1$ et $\rho = 0,6$. Son amplitude, selon l'étude analytique, est indépendante de la fréquence de libration (pour $\omega \rightarrow 0$) et du nombre d'Ekman et varie comme $-0,154\varepsilon^2$. Dans cette section, nous vérifierons expérimentalement et numériquement ces caractéristiques et ces lois d'échelles. On peut noter que l'expression (4.3) diverge pour $\rho = 1$, i.e. près de la paroi extérieure à l'équateur. Ici, l'approche analytique requiert l'introduction de nouvelles échelles dues aux singularités dans la couche d'Ekman. Ceci sera abordé plus en détails dans le dernier chapitre du manuscrit.

4.1.1.1 Méthodologie

Pour effectuer les expériences, nous utilisons le dispositif expérimental détaillé en section 2.2. Nous avons fait varier le nombre d'Ekman $E = \nu/\Omega_0 R^2$ dans la gamme $[10^{-5}; 10^{-4}]$, le rapport entre la fréquence de libration et de rotation $\omega = \omega_{lib}/\Omega_0$ dans la gamme $[0,04; 0,1]$ et l'amplitude de libration ε est comprise dans l'intervalle $[0,02; 0,15]$. La méthode de mesure du champ des vitesses par PIV, a été explicitée en section 2.2.4.2. Dans la situation présente, nous nous intéressons à l'écoulement zonal axisymétrique et indépendant du temps induit par la libration longitudinale alors que le forçage de la sphère est de la forme $\varepsilon \cos(\omega t)$. Pour remonter au vent zonal à partir des mesures PIV, nous prenons la moyenne du champ des vitesses obtenu sur plusieurs périodes de libration afin d'éliminer le terme dépendant du temps. Cela permet également d'améliorer significativement la qualité du signal par rapport au bruit expérimental. Cependant, nous rencontrons deux limitations : la fréquence de libration ne peut pas prendre une valeur trop faible sous peine de ne plus pouvoir faire la moyenne des champs de vitesses résultant sur suffisamment de périodes pour avoir un champ de vitesses correct. Nous ne pouvons également pas aller à des fréquences de libration $\omega > 0,2$ car dans ce cas les contraintes mécaniques deviennent trop fortes sur l'axe de rotation. En pratique, nous avons considéré expérimentalement des fréquences de libration dans la gamme $0,04 \leq \omega \leq 0,1$. Des valeurs plus faibles et plus importantes des fréquences de libration sont atteintes à l'aide des simulations numériques. Le détail de la méthode numérique ainsi que sa validation ont été présentés en section 2.3.

4.1.1.2 Structure de l'écoulement

La figure 4.1(a) présente un champ de vitesses typique obtenu par PIV dans le plan équatorial de la sphère. L'écoulement stationnaire est principalement azimutal et axisymétrique. De plus, comme la sphère tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, l'écoulement zonal correspond ici à une rotation rétrograde, c'est-à-dire opposée à la rotation de la sphère. Dans le référentiel du laboratoire, le fluide a une vitesse de rotation plus faible qu'attendue en l'absence d'effets non-linéaires. À partir de ce champ de vitesses, nous pouvons tracer la vitesse azimutale moyennée dans le temps à l'équateur en fonction de la distance radiale au centre de la sphère. Le champ de vitesses correspondant au champ PIV de la figure 4.1(a) est représenté figure 4.1(b). Notons que du fait des déformations optiques induites par l'interface plane air-silicone et l'interface sphérique silicone-eau, on ne peut mesurer le champ des vitesses pour un rayon $\rho > 0,85$. L'effet des distorsions optiques a été pris en compte à l'aide de la méthode utilisée par Morize *et al.* (2010) dans le cas d'un forçage de marées (pour plus de détails, voir l'annexe C). On peut

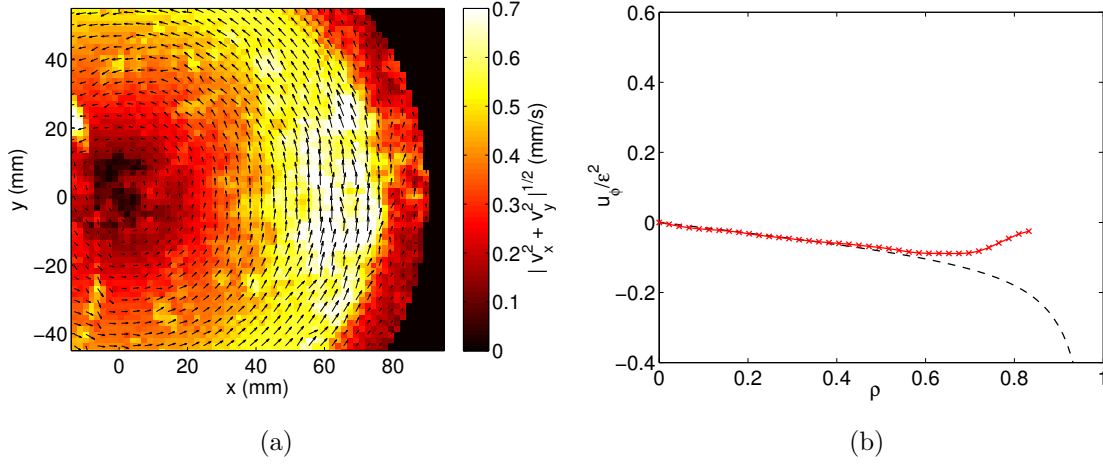


FIGURE 4.1 – (a) Moyenne temporelle du champ des vitesses obtenue par mesure PIV dans le plan équatorial pour $E = 1,15 \times 10^{-5}$, $\varepsilon = 0,08$ et $\omega = 0,1$. La coloration du fond indique la norme de la vitesse horizontale. Le centre de la sphère se situe en $(0;0)$. (b) Valeur expérimentale moyenne de la vitesse azimutale adimensionnée et normalisée par ε^2 (croix rouges) correspondant au champ des vitesses de la figure 4.1(a). La courbe noire en pointillés représente le résultat théorique (4.3).

directement comparer ce champ de vitesses sans dimension à la solution analytique (4.3) à l'aide de la relation (4.1).

On observe un très bon accord jusqu'à une distance du centre de la sphère $\rho \sim 0,6$ sans aucun paramètre d'ajustement. Afin d'estimer la vitesse azimutale au voisinage de $\rho \sim 1$, nous avons représenté sur la figure 4.2 le champ de vitesses obtenu numériquement. Celui-ci est également en très bon accord avec la solution analytique dans le volume pour tous les jeux de paramètres considérés. Pour $\rho \geq 0,6$ une déviation à la théorie dans la direction prograde est induite par la paroi extérieure. Ce point sera discuté par la suite.

4.1.1.3 Lois d'échelles

Nous avons effectué des séries d'expériences et de simulations numériques pour quantifier de manière systématique l'influence des trois paramètres de contrôle sur le vent zonal : le nombre d'Ekman E , l'amplitude de libration ε et la fréquence de libration ω . Notons que les résultats expérimentaux sont représentés par des barres (voir par exemple la figure 4.3(a)) qui illustrent les incertitudes induites par les mesures PIV et la déviation de la vitesse mesurée à une pure rotation solide.

Sur la figure 4.3(a), nous reportons l'influence de l'amplitude de libration, ε , sur le vent zonal. Expérimentalement, le nombre d'Ekman est fixé à $E = 2,3 \times 10^{-5}$, la fréquence de libration à $\omega = 0,07$ et on fait varier ε entre 0,02 et 0,15. Nous présentons également les résultats des simulations numériques effectuées avec $E = 4 \times 10^{-5}$, $\omega = 0,04$ et ε dans la gamme $[0,01; 0,2]$. Les expériences et les résultats numériques sont tous deux quantitativement compatibles avec l'analyse théorique sans aucun paramètre d'ajustement. L'écoulement azimutal stationnaire varie comme ε^2 pour la gamme de valeurs de ε étudiée, ceci montre que ce phénomène est bien non-linéaire. Si l'amplitude de libration ε devient trop élevée, nous nous attendons à ce que l'approche faiblement non-linéaire ne soit plus valide : les termes d'ordres supérieurs ne peuvent plus être négligés. Nous pouvons également remarquer que même dans une gamme de paramètres où

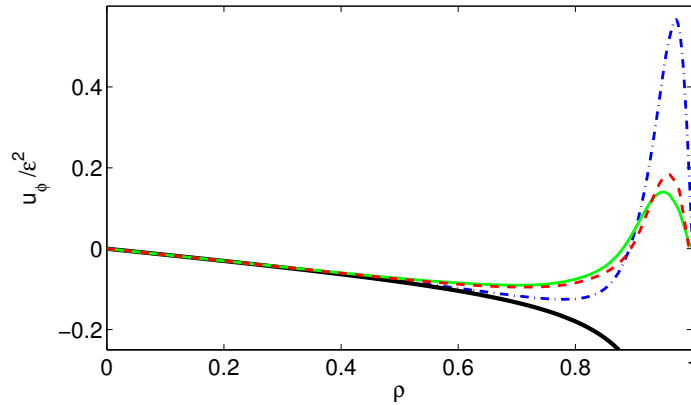


FIGURE 4.2 – Moyennes temporels des profils de vitesse azimutale, adimensionnés et normalisés par ε^2 obtenus par simulation numérique dans le plan équatorial pour $E = 4 \times 10^{-5}$, $\varepsilon = 0,2$ et $\omega = 0,04$ (courbe verte continue); $E = 5 \times 10^{-5}$, $\varepsilon = 0,1$ et $\omega = 0,1$ (courbe bleue en tirets-pointillés); $E = 5 \times 10^{-5}$, $\varepsilon = 0,01$ et $\omega = 0,07$ (courbe rouge en pointillés). La courbe noire épaisse représente le résultat théorique (4.3).

la condition $\omega \ll \varepsilon$ imposée par (3.55) n'est pas respectée, l'écoulement zonal varie toujours comme le carré de l'amplitude de libration ε^2 . En fait, plutôt que cette condition restrictive, nous pouvons simplement imposer que :

- (i) $E \ll 1$ pour découpler l'écoulement en volume et l'écoulement dans les couches limites,
- (ii) $\sqrt{E} \ll \omega \ll 1$ afin de négliger les excitations d'ondes inertielles (Aldridge & Toomre, 1969) et pour s'assurer que les effets de spin-up restent confinés dans les couches visqueuses extérieures,
- (iii) $\varepsilon \ll 1$ pour rester dans le cadre d'une approche faiblement non-linéaire.

Notons que cette discussion rejoint celle effectuée dans la section 3.5 entre la solution (4.2) obtenue dans ce manuscrit et la solution (4.3) proposée par Busse (2010a).

Nous avons ensuite étudié l'influence du nombre d'Ekman sur l'écoulement zonal (figure 4.3(b)). Les résultats expérimentaux, malgré des incertitudes importantes, sont compatibles avec un vent zonal indépendant du nombre d'Ekman comme prédit par Busse (2010a) pour une large gamme de nombres d'Ekman sans aucun paramètre d'ajustement. Ceci est confirmé numériquement jusqu'à $E \sim 2 \times 10^{-4}$. Pour des valeurs plus grandes du nombre d'Ekman, la condition $\sqrt{E} \ll \omega \ll 1$ n'est plus satisfaite et nous ne pouvons plus supposer que les effets de spin-up sont négligeables dans le volume. Nous avons également remarqué numériquement que décroître la valeur de E pour une valeur donnée de la fréquence de libration, $\omega = 0,1$ (qui n'est pas réellement petite), conduit à une déviation à la théorie. En effet, dans ce cas là, les modes inertiels forcés ne sont pas nécessairement négligeables et peuvent perturber l'écoulement en volume. En particulier, les interactions non-linéaires de ces modes forcés peuvent entraîner un vent zonal intense et localisé (voir par exemple Morize *et al.*, 2010). Ce comportement particulier apparaît en particulier en dehors de la limite asymptotique $\omega \ll 1$ qui est considérée ici et dans la suite. Notons que sur la figure 4.3, les barres d'incertitudes augmentent avec le nombre d'Ekman car notre méthode expérimentale ne permet pas de faire la moyenne des champs de vitesses sur un nombre suffisant de périodes quand E augmente.

La figure 4.4(a) montre que l'amplitude de l'écoulement zonal dans le volume ne semble pas dépendre de la fréquence de libration ω dans la limite $\omega \ll 1$. Néanmoins, comme nous pouvons le voir sur la figure 4.2, l'écoulement près de la paroi extérieure varie avec ω . Pour quantifier

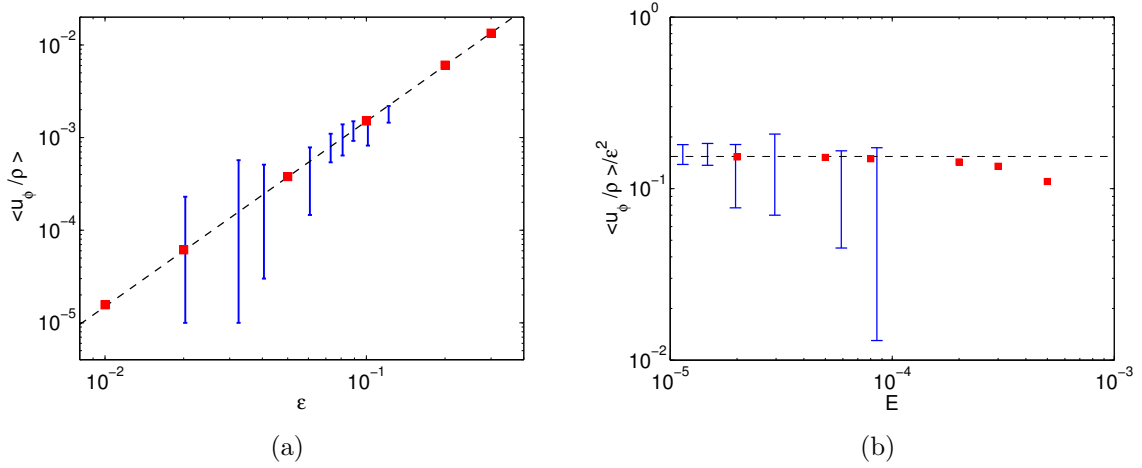


FIGURE 4.3 – (a) Amplitude moyenne adimensionnée de u_ϕ/ρ entre $\rho = 0,1$ et $\rho = 0,6$ en fonction de l'amplitude ε . Les résultats expérimentaux (barres) obtenus pour $E = 2,3 \times 10^{-5}$, $\omega = 0,07$, et les résultats numériques (carrés) obtenus pour $E = 4 \times 10^{-5}$, $\omega = 0,04$ sont comparés avec la valeur théorique de Busse (2010a) (courbe noire en pointillés). (b) Amplitude moyenne adimensionnée de $u_\phi/(\rho \varepsilon^2)$ entre $\rho = 0,1$ et $\rho = 0,6$ en fonction du nombre d'Ekman. Les barres représentent les résultats expérimentaux pour $\varepsilon = 0,08$ et $\omega = 0,1$ et les carrés sont les résultats numériques pour $\varepsilon = 0,2$ et $\omega = 0,06$. La courbe noire en pointillés représente la solution analytique de Busse (2010a).

cette distance à laquelle l'écoulement réel dévie de la solution analytique, nous identifions la valeur r_{min} où la vitesse présente un minimum. L'épaisseur de la couche où se situe l'écoulement prograde est représentée en figure 4.4(b) et semble varier comme $1/\sqrt{\omega}$, ce qui est typique d'un effet de paroi. Ainsi, si ω devient trop grand pour un nombre d'Ekman E fixé, la couche visqueuse, où les effets de parois sont importants, est visible dans le volume et perturbe l'écoulement zonal.

Dans cette section, en combinant des approches expérimentale et numérique, nous avons confirmé les caractéristiques principales de la théorie exposée précédemment : dans la limite $\omega \rightarrow 0$, une rotation différentielle rétrograde est générée par la libration longitudinale de la sphère qui est indépendante du nombre d'Ekman, E , et varie comme ε^2 en accord avec l'analyse théorique de Busse (2010a).

4.1.2 Vent zonal dans une sphère pour $\omega > 2$

Notre dispositif expérimental ne nous permet pas d'étudier des fréquences de libration longitudinale trop importantes, en particulier nous ne pouvons pas étudier l'écoulement généré pour $\omega > 2$. Nous avons donc effectué des simulations numériques dans la sphère. Au chapitre précédent, nous avons vu qu'en l'absence de noyau interne, aucun écoulement axial ni couches de Stewartson ne sont présents dans le volume. La correction moyenne, i.e. le vent zonal, est à l'ordre dominant un écoulement azimuthal donné par

$$u_\phi \sim \varepsilon^2 \frac{\mathcal{F}(\rho; \omega)}{\rho}, \quad (4.4)$$

dans la limite $E \ll 1$ et $\varepsilon \ll 1$ où $\mathcal{F}(\rho; \omega)$ est donnée au chapitre précédent.

La théorie prédit que le vent zonal varie comme le carré de l'amplitude de la libration et doit être indépendant du nombre d'Ekman. La figure 4.5(a), montre les résultats obtenus pour une

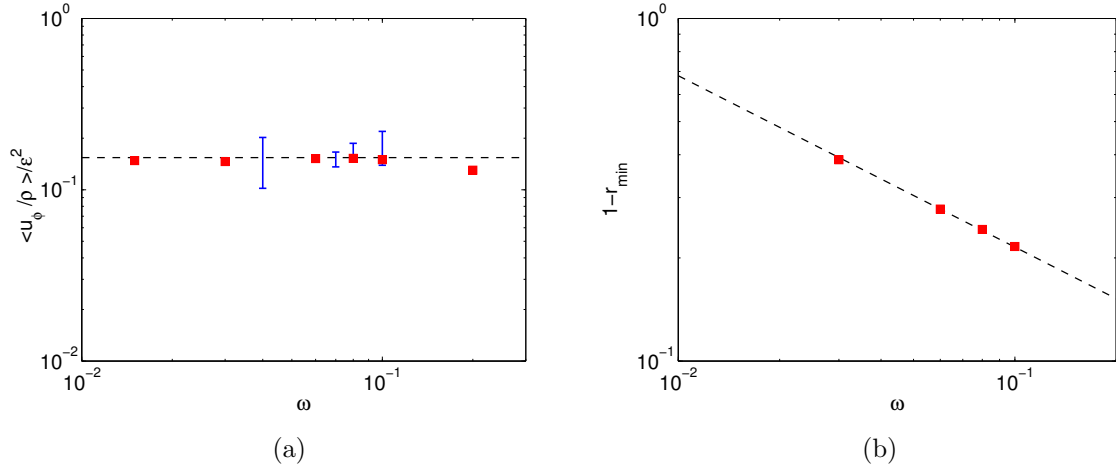


FIGURE 4.4 – (a) Amplitude moyenne adimensionnée de $u_\phi/(\rho\varepsilon^2)$ entre $\rho = 0,1$ et $\rho = 0,6$ en fonction de la fréquence de libration ω ; les carrés sont les valeurs numériques ($E = 5 \times 10^{-5}$, $\varepsilon = 0,2$) et les barres les résultats expérimentaux ($E = 1,5 \times 10^{-5}$, $\varepsilon = 0,1$). La courbe noire en pointillés montre le résultat analytique de Busse (2010a). (b) Distance du minimum de vitesse de la paroi extérieure en fonction de ω obtenue par les simulations numériques avec $E = 5 \times 10^{-5}$, $\varepsilon = 0,2$. La courbe en pointillés varie en $1/\sqrt{\omega}$, ce qui est représentatif d'un effet de peau.

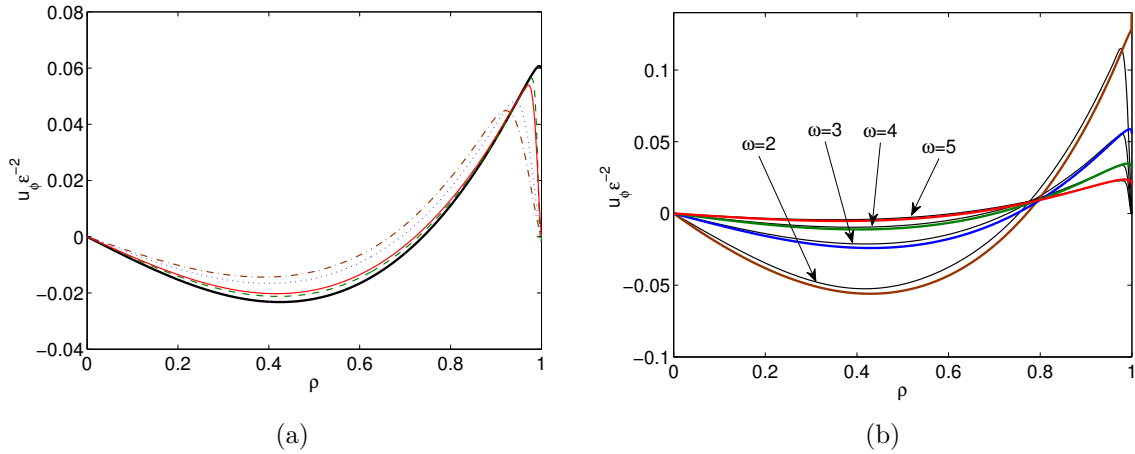


FIGURE 4.5 – Écoulement stationnaire azimuthal $u_{\phi_2} = u_\phi \varepsilon^{-2}$ dans une sphère. Comparaison des résultats numériques obtenus dans le plan équatorial ($z = 0$) avec les résultats théoriques (courbe noire). (a) Pour une fréquence et une amplitude de libration fixes ($\omega = 3$; $\varepsilon = 0,1$) et différents nombres d'Ekman (courbe marron en tirets-pointillés : $E = 10^{-3}$; courbe bleue en pointillés : $E = 5 \times 10^{-4}$; courbe rouge continue : $E = 10^{-4}$; courbe verte en tirets : $E = 4 \times 10^{-5}$); (b) pour un nombre d'Ekman et une amplitude fixes ($E = 5 \times 10^{-5}$, $\varepsilon = 0,01$) et différentes fréquences de libration. Les courbes noires représentent les profils obtenus numériquement et les courbes en couleurs sont les solutions théoriques correspondantes.

fréquence de libration fixe $\omega > 2$, une amplitude fixe et différents nombres d'Ekman. Nous pouvons voir que la courbe numérique, qui est déjà proche de la courbe théorique pour $E = 10^{-3}$, se rapproche encore plus près lorsqu'on diminue le nombre d'Ekman. Comme dans la situation $\omega \ll 1$, la solution dans le volume semble tendre vers la solution théorique à petit Ekman et ensuite ne plus dépendre de celui-ci. Notons également une déviation à la théorie au voisinage de $\rho = 1$ qui est associée à la présence d'une couche d'Ekman sur la sphère extérieure que nous n'avons pas incluse dans l'expression analytique (4.4) dans le volume. Quand E diminue, la couche limite, qui varie en $E^{1/2}$, devient plus fine. L'amplitude ε a été modifiée. Une fois le vent zonal normalisé par ε^2 , ces deux figures montrent que sa variation est toujours en ε^2 . Nous avons également comparé la théorie et les résultats des simulations numériques pour différentes fréquences de libration comme illustré en figure 4.5(b). Une fois de plus, nous observons un bon accord pour toutes les fréquences étudiées. Ces résultats numériques permettent de valider l'analyse asymptotique qui a conduit à l'expression (4.4). Notons que l'écoulement zonal considéré analytiquement au chapitre précédent puis numériquement dans ce chapitre sont tout deux eulériens. Par contre, l'écoulement zonal déterminé expérimentalement par PIV peut comporter, à la fois, une composante eulérienne, mais aussi une composante lagrangienne¹. La contribution lagrangienne est également quadratique avec l'amplitude du forçage mais n'a pas la même origine : elle est induite par un effet cinématique local lié à l'inhomogénéité du champ des vitesses. En particulier, cette contribution peut également être présente même lorsque la moyenne eulérienne est nulle. Dans le cas de la libration pour $\omega \rightarrow 0$ observé ici, l'écoulement dans le volume est non-visqueux et les inhomogénéités sont négligeables, on s'attend donc à ce que seule la composante eulérienne soit mesurée. Par contre, au voisinage des parois visqueuses ou en présence d'ondes inertielles, il est possible que la contribution lagrangienne ne soit plus négligeable. Du fait des effets optiques, l'écoulement zonal n'a pas pu être mesuré au voisinage de la paroi extérieure où il serait susceptible d'être différent de la théorie. L'estimation de la contribution lagrangienne dans différentes situations consistera une prolongation expérimentale intéressante.

4.1.3 Comparaison numérique dans une coquille sphérique

Dans cette partie, nous comparons les résultats asymptotiques obtenus dans une coquille sphérique avec les résultats numériques de [Calkins et al. \(2010\)](#). Leur méthode numérique repose également sur un modèle 2D (axisymétrique), mais elle est basée sur des éléments spectraux ce qui permet d'atteindre des valeurs du nombre d'Ekman plus petites, typiquement de l'ordre de $E = 10^{-6}$.

La théorie développée au chapitre précédent prédit que, dans la coquille sphérique en libration longitudinale, l'écoulement azimuthal généré reste indépendant de la coordonnée axiale z dans le volume mais montre une discontinuité à travers le cylindre tangent au noyau interne, en $\rho = a$. Une telle discontinuité est visible dans les résultats numériques. Sur la figure 4.6(a), les résultats numériques obtenus par [Calkins et al. \(2010\)](#) pour deux valeurs du nombre d'Ekman ($E = 10^{-5}$ and $E = 10^{-6}$) sont comparés avec la prédiction théorique dans le volume (régions I et II). L'accord avec la théorie est bon si on ne considère pas la région proche de $\rho = a = 0,35$ où la solution théorique dans le volume n'est pas continue. En particulier, notons que pour les deux nombres d'Ekman considérés, et une valeur quelconque de z , les profils de vitesse azimuthale se superposent sur une seule courbe loin de $\rho = 0,35$ comme prédit par la théorie. A l'instar

1. appelée dérive de Stokes

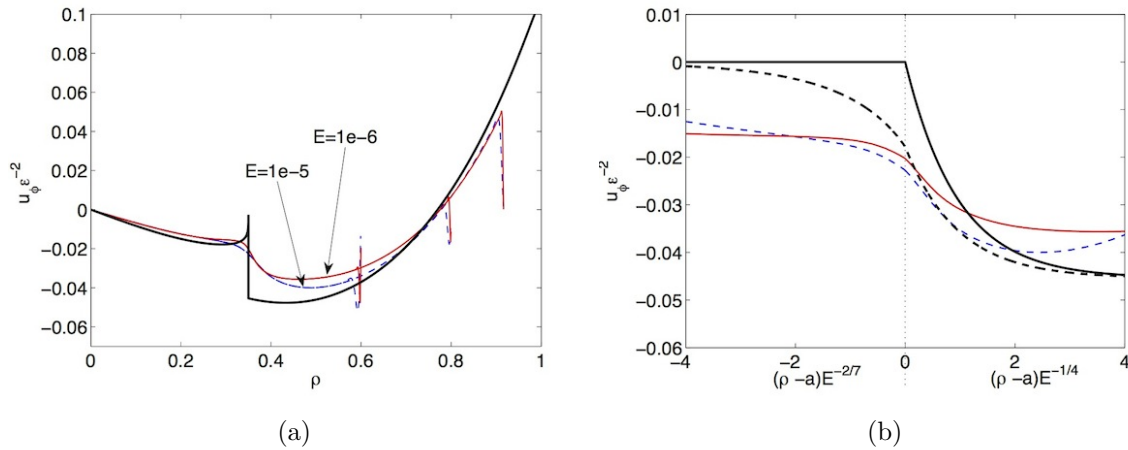


FIGURE 4.6 – Vitesse azimutale stationnaire pour $\varepsilon = 2,2 \times 10^{-3}$, $a = 0,35$, $\omega = 2,2$ et $\alpha = 0$ (aucune libration du noyau intérieur). (a) Solution dans le volume : $u_{\phi_2} = u_{\phi} \varepsilon^{-2}$ en fonction de ρ . La courbe noire épaisse est la prédiction théorique dans le volume (régions I et II). Les courbes fines sont les résultats numériques obtenus par [Calkins et al. \(2010\)](#) pour trois différentes positions axiales z ($z = 0,4, 0,6, 0,8$) et deux nombres d'Ekman différents ($E = 10^{-5}$: tirets bleus ; $E = 10^{-6}$: rouge). (b) Solution dans les couches de Stewartson : $u_{\phi_2} = u_{\phi} \varepsilon^{-2}$ en fonction de $(\rho - a)/E^{1/4}$ pour $\rho > a$ et en fonction de $(\rho - a)/E^{2/7}$ pour $\rho < a$. La courbe noire épaisse est la prédiction théorique à l'ordre dominant dans les couches de Stewartson externes. La courbe en tirets noirs épais est la prédiction théorique pour $E = 10^{-6}$ où la correction en $E^{1/28}$ a été prise en compte. Les lignes fines sont les résultats numériques de [Calkins et al. \(2010\)](#) en $z = 0,6$ (rouge : $E = 10^{-6}$; tirets bleus : $E = 10^{-5}$).

de la figure 4.5, les variations rapides localisées que l'on observe sur les courbes numériques correspondent à la couche limite sur la sphère extérieure définie par $\rho^2 + z^2 = 1$. Leurs positions varient car différentes valeurs de z sont considérées.

Dans les couches de Stewartson, la solution devient dépendante de la valeur du nombre d'Ekman. Sur la figure 4.6(b) les résultats numériques pour $z = 0,6$ sont tracés en fonction des variables associées à ces couches : $(\rho - a)/E^{1/4}$ et $(\rho - a)/E^{2/7}$. Ces résultats sont comparés à la prédiction théorique à l'ordre dominant ainsi qu'à la solution théorique prenant en compte l'ordre suivant pour $E = 10^{-6}$. On peut tout d'abord remarquer qu'il y a un effet notable de la correction au second ordre sur la courbe théorique. Cette correction qui est d'ordre $E^{1/28}$ n'est clairement pas petite pour un nombre d'Ekman $E = 10^{-6}$. Si cette correction est prise en compte, un accord relativement bon est obtenu entre la courbe théorique et la solution numérique au voisinage de $\rho = a$.

Une comparaison similaire est effectuée pour la vorticité axiale figure 4.7 et pour la vitesse axiale figure 4.8. Sur les figures 4.7(a) et 4.8(a), nous avons comparé le résultat des simulations numériques avec la solution théorique dans le volume, qui est donnée par l'expression (3.40) avec les relations (3.39a,b) dans la région II ($\rho < a$), et avec les relations (3.36), (3.37) dans la région ($\rho > a$). Un bon accord est observé loin de $\rho = a$. Notons en particulier qu'à la fois la vorticité axiale et la vitesse axiale sont indépendantes de z loin du cylindre tangent, situé en $\rho = a$, comme supposé par la théorie.

Cependant, il y a des différences systématiques qui n'étaient pas présentes dans le cas de la sphère. Nous suspectons que ces différences sont induites par les corrections d'ordre $O(E^{1/28})$

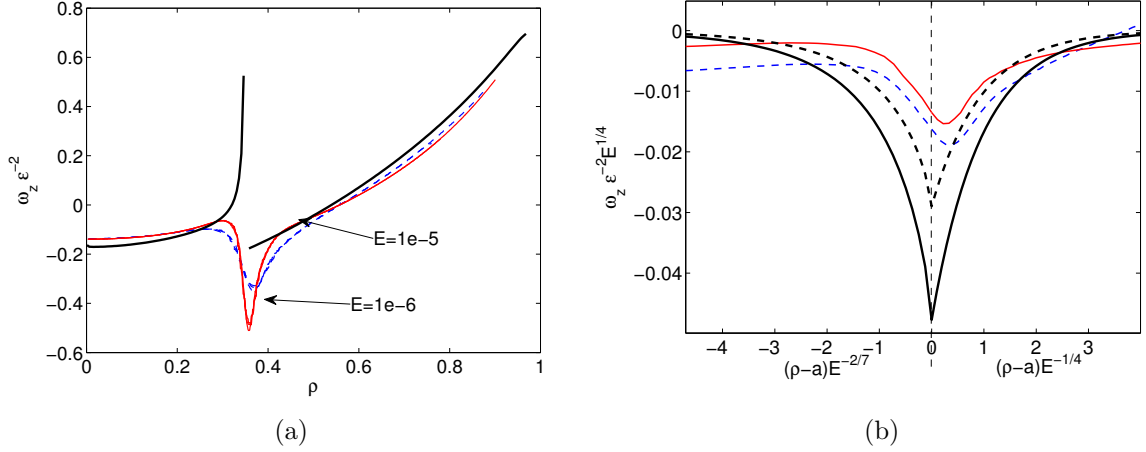


FIGURE 4.7 – Vorticité axiale moyenne pour $\varepsilon = 2,2 \times 10^{-3}$, $a = 0,35$, $\omega = 2,2$ et $\alpha = 0$ (aucune libration du noyau interne). (a) Solution dans le volume : $\omega_z \varepsilon^{-2}$ en fonction de ρ . La courbe noire épaisse est la prédiction théorique dans le volume (régions I et II). Les courbes fines sont les résultats numériques obtenus par [Calkins et al. \(2010\)](#) à trois positions axiales différentes z ($z = 0,4, 0,6, 0,8$) et deux valeurs du nombre d'Ekman ($E = 10^{-5}$: pointillés bleus ; $E = 10^{-6}$: rouge). (b) Solution dans les couches de Stewartson : $\omega_z \varepsilon^{-2} E^{1/4}$ en fonction de $(\rho - a)/E^{1/4}$ pour $\rho > a$ et en fonction de $(\rho - a)/E^{2/7}$ pour $\rho < a$. La courbe noire épaisse et continue est la prédiction théorique à l'ordre dominant dans les couches de Stewartson externes. La courbe en tirets noirs épais est la prédiction théorique pour $E = 10^{-6}$ où la correction en $E^{1/28}$ a été prise en compte. Les courbes fines représentent les résultats numériques de [Calkins et al. \(2010\)](#) en $z = 0,6$ (rouge : $E = 10^{-6}$, tirets bleus : $E = 10^{-5}$).

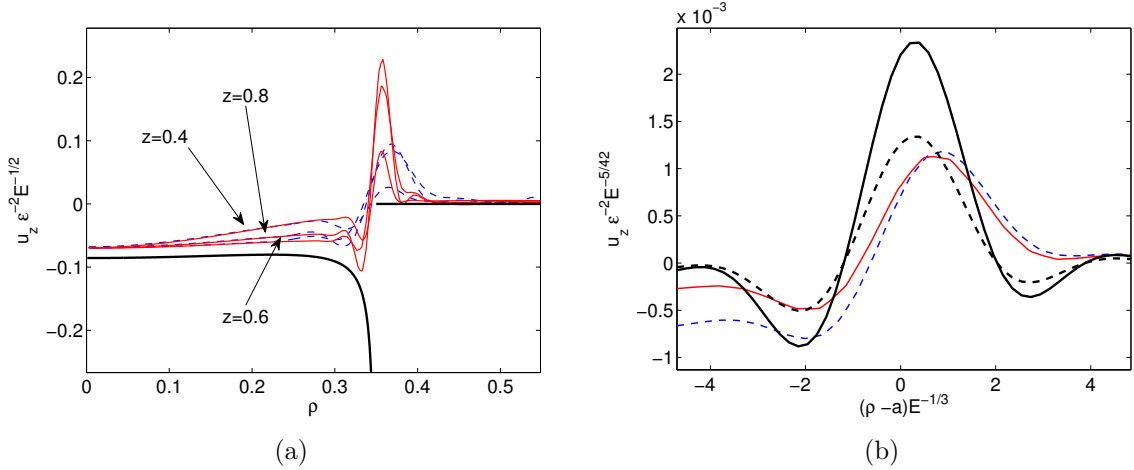


FIGURE 4.8 – Vitesse axiale moyenne pour $\varepsilon = 2,2 \times 10^{-3}$, $a = 0,35$, $\omega = 2,2$ et $\alpha = 0$ (aucune libration du noyau interne). (a) Solution dans le volume : $u_z \varepsilon^{-2} E^{-1/2}$ en fonction de ρ . La courbe noire épaisse est la prédiction théorique dans le volume (régions I et II). Les courbes fines sont les résultats numériques obtenus par [Calkins et al. \(2010\)](#) pour trois valeurs de z ($z = 0,4, 0,6, 0,8$) et deux nombres d'Ekman différents ($E = 10^{-5}$: tirets bleus, $E = 10^{-6}$: rouge). (b) Solution dans la couche de Stewartson intérieure en $z = 0,7$: $u_z \varepsilon^{-2} E^{-5/42}$ en fonction de $(\rho - a)/E^{1/3}$. La courbe noire épaisse est la prédiction théorique à l'ordre dominant dans la couche de Stewartson interne. La courbe en tirets noirs épais est la prédiction théorique pour $E = 10^{-6}$ où la correction en $E^{1/28}$ a été prise en compte. Les lignes fines sont les résultats numériques de [Calkins et al. \(2010\)](#) pris en $z = 0,7$ (rouge : $E = 10^{-6}$; tirets bleus : $E = 10^{-5}$).

générées dans les couches de Stewartson et qui ne sont pas négligeables pour $E = 10^{-6}$. Sur la figure 4.7(b), la vorticité axiale est tracée en fonction des coordonnées des couches de Stewartson extérieures. Bien qu'un léger décalage soit présent dans les simulations numériques, nous pouvons voir que le pic de vorticité, avec sa variation en $E^{-1/4}$, est qualitativement décrit. Sur la figure 4.8(b), la vitesse axiale est tracée en fonction de la coordonnée de couche de Stewartson intérieure. L'accord avec l'approximation théorique au second ordre est remarquable pour cette valeur de z . Une fois de plus, un léger décalage est observé qui semble diminuer lorsque le nombre d'Ekman diminue. D'autres valeurs de z ont également été testées et un moins bon accord a été obtenu pour de plus petites valeurs de z . Les résultats numériques montrent un jet plus faible alors que la théorie prédit l'opposé. Nous supposons que cette différence qualitative n'est pas seulement due aux grandes valeurs des nombres d'Ekman considérés mais aussi à la structure particulière des couches de Stewartson pour les petites valeurs de z qui n'ont pas été résolues.

Pour résumer cette section, les résultats asymptotiques obtenus dans le chapitre précédent ont été comparés à des résultats numériques disponibles dans la littérature (Calkins *et al.*, 2010) ou obtenus avec le code éléments finis présenté en section 2.3. Un bon accord a été montré pour l'écoulement zonal dans une sphère ou dans le volume en présence d'un noyau interne. Un accord raisonnable a été obtenu pour la structure particulière de la solution dans les couches de Stewartson en dépit de la valeur assez importante du nombre d'Ekman considéré dans les simulations numériques. En particulier, nous avons montré qu'il était indispensable de considérer la correction au second ordre pour obtenir un accord correct. Mentionnons aussi que cette théorie est valable jusqu'à $O(E^{1/14})$. Même pour des valeurs astrophysiques réalistes du nombre d'Ekman, $E \approx 10^{-14}$, nous ne pouvons garantir que l'erreur restera petite. Ceci constitue un point faible de la théorie qu'il est important de garder à l'esprit quand ces résultats sont appliqués.

4.2 Libration longitudinale en géométrie axisymétrique

Dans cette section, nous supposons toujours qu'aucune onde inertielle n'est générée par le forçage harmonique. Dans un premier temps, nous extrapolons numériquement le calcul effectué précédemment à différentes géométries axisymétriques : sphéroïde, cylindre. Puis, à l'aide d'une situation simple, nous montrons qu'un forçage azimutal, par exemple une déformation de marées, induit également un écoulement possédant les mêmes caractéristiques que le vent zonal généré par libration longitudinale dans un conteneur axisymétrique. Une fois ceci démontré, nous étudions la libration longitudinale d'un ellipsoïde. Dans ce cas, en plus du couplage visqueux, un couplage topographique avec la paroi est également présent. Le vent zonal généré est caractérisé, ainsi que les effets induits par ce couplage topographique.

4.2.1 De la sphère au sphéroïde

Indépendamment de la déformation de marées qui engendre des ellipsoïdes triaxiaux non-axisymétriques, la seule rotation propre des planètes et des satellites tend à les aplatir et leur forme n'est plus précisément une sphère, mais un sphéroïde. Mathématiquement, l'équation de la surface d'un sphéroïde s'écrit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (4.5)$$

où (x, y, z) est le système de coordonnées cartésiennes où l'origine est placée au centre du sphéroïde et deux des trois coefficients a , b et c sont égaux. Pour un sphéroïde de révolution, i.e.

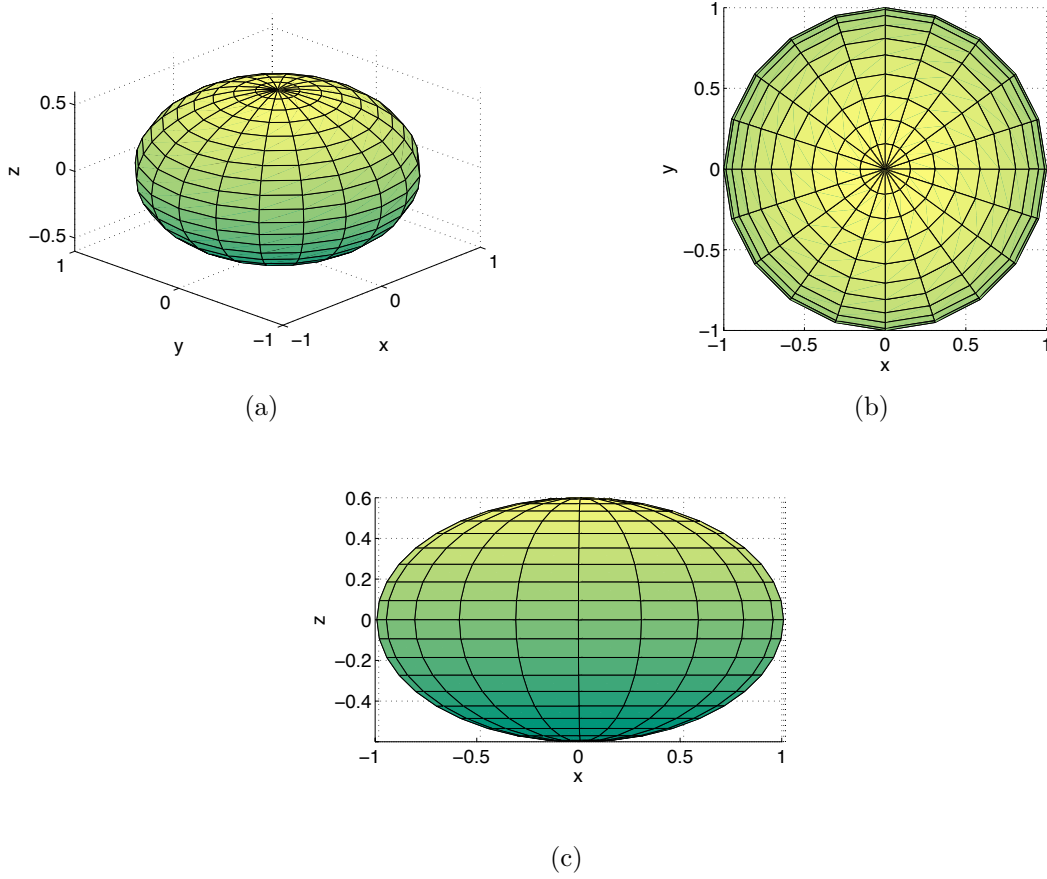


FIGURE 4.9 – (a) Sphéroïde oblate d’axe $a = b = 1$ et $c = 0,6$. (b) Vue suivant l’axe de rotation mettant en évidence l’axisymétrie. (c) Vue de coté illustrant l’aplatissement du sphéroïde. L’axe de rotation est suivant (Oz) .

axisymétrique, l’axe de rotation est celui dont le coefficient diffère des deux autres. Par exemple, si on suppose que \mathbf{e}_z est l’axe de rotation, alors $a = b \neq c$. On peut alors distinguer les sphéroïdes oblates (où $c < a$, illustré sur la figure 4.9), des sphéroïdes prolates ($c > a$). Le cas de la sphère est retrouvé pour $a = b = c$. Du fait de leur rotation propre, les planètes sont oblates et l’aplatissement, qui mesure la déformation à l’équateur, est défini par

$$\eta = \frac{(a - c)}{a}. \quad (4.6)$$

A titre d’illustration, dans le Système Solaire, la Terre a un aplatissement $\eta = 0,0034$, Mars, $\eta = 0,0065$. Jupiter et Saturne sont les deux planètes avec le plus grand aplatissement, respectivement $\eta = 0,0649$ et $0,098$. Notons que les sphéroïdes oblates ont un aplatissement positif, alors que les prolates ont un aplatissement négatif.

La figure (4.10) présente des résultats numériques du vent zonal obtenus pour différents sphéroïdes d’aplatissements différents et une fréquence de libration faible, $\omega = 0,1$. Le modèle utilisé est le même que précédemment, sauf que la géométrie a été modifiée afin d’avoir un sphéroïde axisymétrique d’aplatissement η . Pour un aplatissement modéré, $\eta = 0,2$, le vent zonal reste très proche du vent zonal obtenu dans une sphère ($\eta = 0$). Néanmoins pour des sphéroïdes d’aplatissement conséquent : $\eta = 0,6$, $\eta = 0,8$, le vent zonal obtenu numériquement n’est plus assimilable directement à celui dans la sphère. Pour les planètes, dont les valeurs

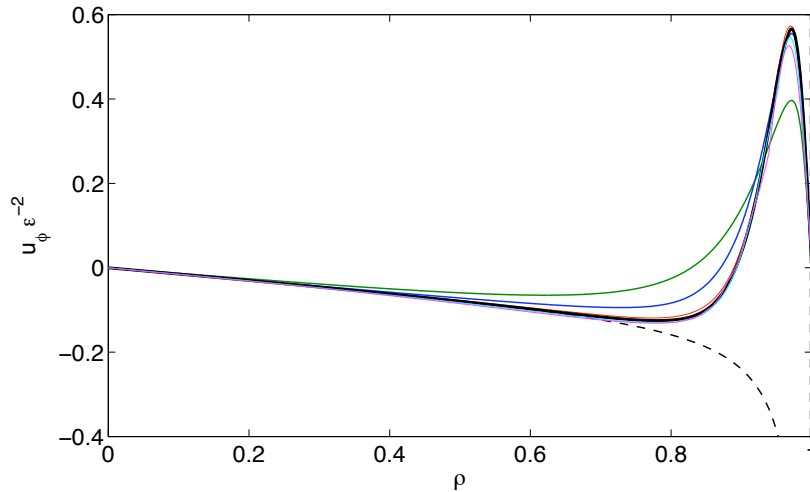


FIGURE 4.10 – Écoulement stationnaire azimutal, $u_\phi \varepsilon^{-2}$, en fonction de la coordonnée radiale ρ , pour des sphéroïdes d’aplatissements différents et les mêmes paramètres, $\omega = 0,1$, $\varepsilon = 0,05$ et $E = 5 \times 10^{-5}$. La courbe en tirets noirs est l’expression établie au chapitre précédent. Les valeurs de l’aplatissement sont $\eta = 0,8$ (courbe verte), $\eta = 0,6$ (courbe bleue), $\eta = 0,2$ (courbe rouge), $\eta = 0$ (courbe noire), $\eta = -0,4$ (courbe magenta) et $\eta = -0,8$ (courbe cyan).

d’aplatissement restent inférieures à $\eta = 0,1$, nous pouvons supposer que le vent zonal demeure celui d’une sphère au premier ordre et négliger l’aplatissement.

Notons que la théorie développée au chapitre précédent reste facilement applicable au cas du sphéroïde axisymétrique. Aucun effet topographique ne rentre en compte durant l’oscillation du conteneur, à l’opposé du cas de l’ellipsoïde que nous verrons dans la suite. Ainsi, nous pouvons appliquer le calcul théorique développé au chapitre précédent en considérant une normale locale tenant compte de l’aplatissement du sphéroïde. Ce calcul ne modifie pas la physique du phénomène, le couplage reste visqueux entre les parois et le fluide intérieur dans un sphéroïde comme dans une sphère. Par conséquent, les mêmes lois d’échelles sont attendues : une variation du vent zonal comme le carré de l’amplitude de libration, ε^2 , et indépendante du nombre d’Ekman E .

A titre d’illustration, nous avons également représenté le vent zonal pour des sphéroïdes prolates sur la figure (4.10). Celui-ci reste très proche du vent zonal obtenu dans la sphère.

4.2.2 Libration longitudinale d’un cylindre axisymétrique

L’écoulement non-linéaire généré par un forçage oscillant dans un cylindre en rotation a été étudié, dans les années 1970 par Wang (1970). Ici, nous vérifions numériquement les principales caractéristiques de cet écoulement zonal et comparons ces résultats avec l’expression (3.43) obtenue au chapitre 3.

Nous utilisons le modèle numérique présenté en section 2.3. La seule différence vient de la géométrie du conteneur qui est maintenant un cylindre de rayon R et de hauteur H (voir figure 4.11 ci-contre). Les paramètres et les équations demeurent inchangés : le cylindre est en rotation à la vitesse angulaire moyenne Ω_0 autour de son axe de symétrie. En utilisant Ω_0^{-1} comme échelle de temps et R comme échelle de longueur, la vitesse angulaire adimensionnée du cylindre est donnée par

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = [1 + \varepsilon \cos(\omega t)] \mathbf{e}_z, \quad (4.7)$$

où ω et ε sont la fréquence et l'amplitude de libration longitudinale adimensionnée, et \mathbf{e}_z est le vecteur unitaire dans la direction de l'axe de rotation. Le nombre d'Ekman est défini par rapport au rayon du cylindre²

$$E = \frac{\nu}{\Omega_0 R^2}, \quad (4.8)$$

Le fluide satisfait des conditions de non-glissement aux parois :

$$\mathbf{u} = \varepsilon \cos(\omega t) \mathbf{e}_\theta \quad \text{en} \quad r = 1, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{u} = \varepsilon r \cos(\omega t) \mathbf{e}_\theta \quad \text{en} \quad z = \pm \alpha/2, \quad (4.10)$$

où $\alpha = H/R$ est le rapport d'aspect du cylindre et (r, z) sont ici les coordonnées cylindriques radiale et axiale. Le modèle numérique et ses caractéristiques telles que la méthode temporelle de résolution ou le maillage restent identiques au modèle présenté section 2.3.

Nous utilisons une amplitude de libration ε suffisamment faible afin que la couche visqueuse au voisinage de la paroi latérale soit stable vis-à-vis d'une instabilité centrifuge. L'étude de cette instabilité centrifuge, obtenue pour de plus grandes valeurs de ε , est présentée au chapitre 5. Une solution entièrement analytique du vent zonal a été obtenue dans le cylindre par Wang (1970) pour une fréquence de libration ω arbitraire, en supposant qu'aucun mode inertiel n'est excité dans le fluide. Il a établi qu'une correction stationnaire est générée dans le volume de la forme $\overline{u}_\theta = \varepsilon^2 r \Omega_2(\omega)$, où Ω_2 est uniforme dans le volume³. L'expression explicite de Ω_2 en fonction de la fréquence de libration est donnée, pour $\omega < 2$ par :

$$\begin{aligned} \Omega_2 = & \frac{(\omega + 1) \sqrt{4 + 2\omega} + 2}{8 \sqrt{4 + 2\omega} (\omega^2 + 4\omega + 5)} - \frac{(\omega - 1) \sqrt{4 - 2\omega} - 2}{8 \sqrt{4 - 2\omega} (\omega^2 - 4\omega + 5)} - \frac{1}{\sqrt{4 - 2\omega} \sqrt{4 + 2\omega}} \\ & + \frac{\sqrt{4 - 2\omega} \sqrt{4 + 2\omega} + \omega(\sqrt{4 + 2\omega} - \sqrt{4 - 2\omega}) - 4}{\sqrt{4 - 2\omega} \sqrt{4 + 2\omega} (2 + \sqrt{4 + 2\omega} \sqrt{4 - 2\omega})(\sqrt{4 + 2\omega} + \sqrt{4 - 2\omega})}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

et pour $\omega > 2$ par

$$\begin{aligned} \Omega_2 = & \frac{(\omega + 1) \sqrt{2\omega + 4} + 2}{8 \sqrt{2\omega + 4} (\omega^2 + 4\omega + 5)} - \frac{(\omega - 3) \sqrt{2\omega - 4} + 2}{8 \sqrt{2\omega - 4} (\omega^2 - 4\omega + 5)} \\ & + \frac{2\omega - \sqrt{2\omega + 4} \sqrt{2\omega - 4}}{2\omega \sqrt{2\omega + 4} \sqrt{2\omega - 4}} + \frac{2\omega (\omega^2 - 6) - \sqrt{2\omega + 4} (\omega^2 + 3\omega - 12)}{4\omega (\omega^2 - 3) \sqrt{2\omega + 4} \sqrt{2\omega - 4}} \\ & - \frac{\sqrt{2\omega - 4} (\omega^2 - 3\omega - 12) + 3\omega \sqrt{2\omega + 4} \sqrt{2\omega - 4}}{4\omega (\omega^2 - 3) \sqrt{2\omega + 4} \sqrt{2\omega - 4}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Wang (1970) a également prédit que cet écoulement zonal doit satisfaire les conditions de non-glissement sur la paroi extérieure du cylindre, $\overline{u}_\theta(r = 1) = 0$, à l'aide d'une couche visqueuse d'épaisseur $E^{1/4}$. De plus, il a montré qu'une autre couche visqueuse d'épaisseur $E^{1/3}$ est nécessaire pour satisfaire la continuité du champ de vitesse axiale au voisinage de la paroi latérale.

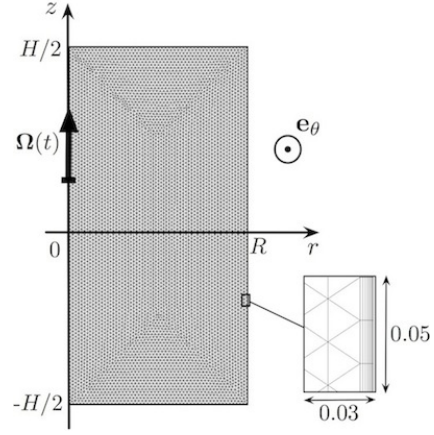


FIGURE 4.11 – Conteneur cylindrique et coordonnées cylindrico-polaires (r, θ, z) . L'axe z est l'axe de symétrie et de rotation. Le maillage utilisé est également représenté.

2. même si une définition basée sur la hauteur du cylindre est également possible

3. Notons le papier récent de Busse (2010b) qui considère la limite $\omega \rightarrow 0$ dans un cylindre.

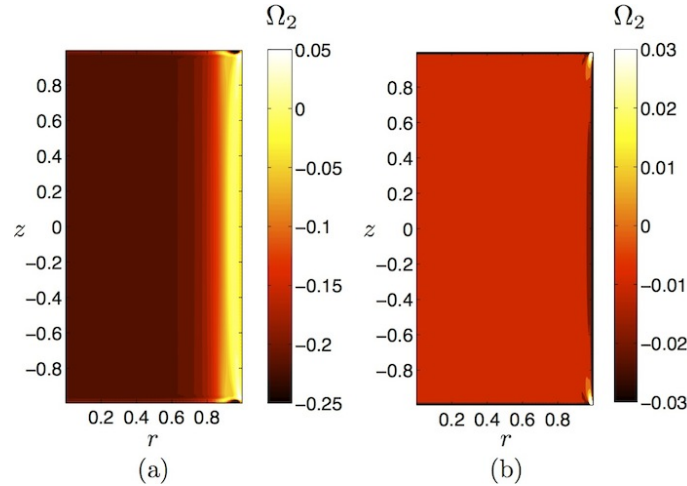


FIGURE 4.12 – Vitesse angulaire $\Omega_2 = u_{\theta,2}/r$ du vent zonal dans un cylindre de rapport d'aspect $\alpha = 2$ obtenue numériquement pour $\varepsilon = 0,05$, $E = 4 \times 10^{-5}$, (a) $\omega = 0,05$ et (b) $\omega = 6$.

Il a proposé une approximation composite pour la composante azimutale du champ des vitesses qui prend en compte la couche d'épaisseur $E^{1/4}$:

$$\overline{u_\theta} = \varepsilon^2 u_{\theta,2} = \varepsilon^2 r \Omega_2 \left[1 - \exp\left(-\frac{1-r}{E^{1/4}}\right) \right]. \quad (4.13)$$

C'est cette expression, avec Ω_2 donnée par (4.11) et (4.12) que nous allons tester par la suite.

Les figures 4.12(a) et 4.12(b) représentent la vitesse angulaire moyenne dans le référentiel en rotation obtenue par simulations numériques et tracée dans un plan méridien (r, z) pour deux fréquences de libration, $\omega = 0,05$ (figure 4.12(a)) et $\omega = 6$ (figure 4.12(b)). A faible fréquence de libration, l'influence des ondes inertielles est négligeable, alors que pour $\omega = 6$ aucune onde inertielle ne se propage. On note une rotation uniforme dans le volume dans les deux cas. De plus, près de la paroi extérieure ($r = 1$), la vitesse angulaire moyenne est indépendante de la coordonnée axiale z , en bon accord qualitatif avec la formule (4.13). Notons cependant les petites structures localisées au niveau des coins du cylindre et non décrites par la théorie de Wang. Néanmoins, la compréhension de ces structures et de l'écoulement au voisinage des coins du cylindre reste hors de portée à l'heure actuelle.

La dépendance de la vitesse angulaire moyenne pour différentes valeurs de l'amplitude de libration ε est illustrée figure 4.13. Toutes les courbes numériques se superposent une fois normalisée par ε^2 . Ceci confirme, pour le cylindre, la loi d'échelle en ε^2 de l'écoulement zonal moyen dans le cylindre, comme observé précédemment dans la sphère. L'influence du nombre d'Ekman est étudiée sur les figures 4.14(a) et 4.14(b). La vitesse angulaire normalisée, $\Omega_2 = u_{\theta,2}/r$, est tracée en fonction de la coordonnée $\tilde{\rho} = (1 - \rho)/E^{1/4}$ en gardant ε constant. Pour de grandes valeurs de $\tilde{\rho}$ (i.e. loin de la paroi latérale) toutes les courbes se superposent approximativement sur la prédiction théorique. Ceci signifie que la vitesse angulaire associée au vent zonal ne dépend pas du nombre d'Ekman dans le volume, comme prédit par la théorie. Proche de la paroi latérale, la différence entre la théorie et les résultats numériques est, par contraste, visible : en l'absence d'instabilité, un pic prograde dont l'amplitude varie avec le nombre d'Ekman est obtenu. Nous suspectons que la petite structure localisée au voisinage des coins est à l'origine de ces différences près de la paroi latérale. En effet, dans le cylindre un problème supplémentaire apparaît qui n'a

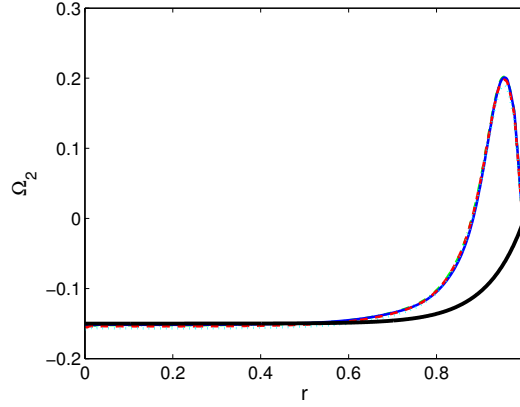


FIGURE 4.13 – Vitesse angulaire $\Omega_2 = u_{\theta,2}/r$ associée à l’écoulement zonal en fonction du rayon r du cylindre pour un rapport d’aspect $\alpha = 2$, $E = 5 \times 10^{-5}$, $\omega = 0,05$ et différentes valeurs de l’amplitude de libration : ε : $\varepsilon = 0,01$ (pointillés cyans), $\varepsilon = 0,05$ (tirets rouges), $\varepsilon = 0,1$ (pointillés-tirets verts), $\varepsilon = 0,2$ (courbe continue bleue). La courbe noire épaisse représente la prédiction théorique de Wang (1970) incluant la couche visqueuse d’épaisseur $E^{1/4}$ [expression (4.13)].

pas été résolu par Wang (1970) et qui demeure à l’heure actuelle non traité : la présence d’un coin où les couches visqueuses latérales et supérieures/inférieures se rejoignent. Wang (1970) a supposé que chaque couche peut être traitée indépendamment. Les résultats numériques présentés ici tendent à montrer que cette hypothèse n’est pas correcte et que la région latérale peut être affectée de manière importante par les coins. La caractérisation de l’écoulement proche des coins demeure cependant un grand challenge et va au-delà de la problématique de cette thèse. Le calcul de l’interaction non-linéaire du champ des vitesses dans la couche limite avec lui-même pourrait également contribuer à expliquer cette différence.

La valeur de la vitesse angulaire associée au vent zonal, Ω_2 , obtenue dans le volume est systématiquement mesurée en différents points pour des fréquences de libration ω comprises entre 0,05 et 25. Les résultats sont tracés et comparés à la théorie sur la figure 4.15(a). Nous avons également superposé la théorie de Wang (1970) avec l’expression (3.43) obtenue au chapitre 3. Ces deux courbes se superposent exactement : le calcul effectué au chapitre précédent permet donc d’obtenir l’écoulement zonal dans un cylindre. Pour $\omega > 2$, un très bon accord est obtenu entre la théorie et le numérique. Dans ce régime aucune onde inertielle ne peut être excitée par le forçage. L’hypothèse de Wang (i.e. aucun forçage de mode inertielle) est alors satisfaite. Notons en particulier que l’écoulement zonal dans cette limite peut être prograde, comme nous l’avons vu dans la sphère. Un bon accord est également observé pour de petites fréquences ($\omega = 0,05$). Pour cette fréquence, nous suspectons qu’aucun mode inertielle n’est excité du fait de la hauteur finie du cylindre et la valeur relativement grande du nombre d’Ekman utilisée. Par contraste, pour les autres fréquences entre 0 et 2, des modes inertiels sont excités dans le système et se propagent dans le volume. Une différence entre la théorie et les résultats numériques est alors observée dans cette gamme de fréquences (voir la figure 4.15(b)). Ce régime, où les modes inertiels sont excités est étudié dans la suite (chapitre 7).

En résumé, le forçage harmonique temporel dans un cylindre génère un écoulement zonal comme prédit théoriquement par Wang (1970). Les caractéristiques d’un tel écoulement sont identiques au cas de la sphère traité précédemment : il varie comme le carré de l’amplitude du forçage, ε^2 et ne dépend pas du nombre d’Ekman de l’écoulement. Notons que la solution

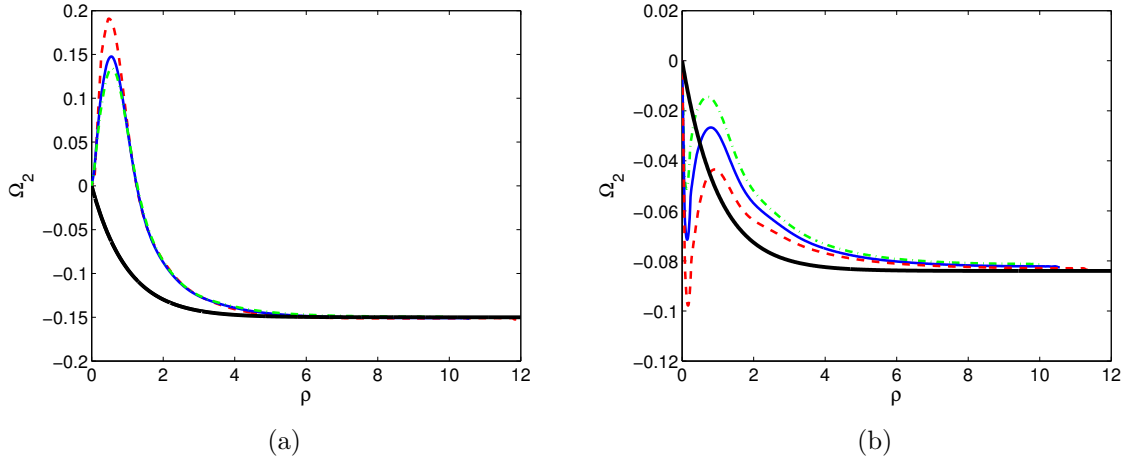


FIGURE 4.14 – Vitesse angulaire $\Omega_2 = u_{\theta,2}/r$ associée à l'écoulement zonal en fonction de la coordonnée locale $\rho = (1-r)/E^{1/4}$ dans un cylindre de rapport d'aspect $\alpha = 2$ représenté pour $\varepsilon = 0,1$, (a) $\omega = 0,07$ et (b) $\omega = 3$ avec différentes valeurs du nombre d'Ekman E : $E = 10^{-4}$ (pointillés-tirets verts), $E = 8 \times 10^{-5}$ (courbe bleue continue), $E = 4 \times 10^{-5}$ (tirets rouges). La courbe noire représente la prédiction théorique de Wang (1970) incluant la couche visqueuse d'épaisseur $E^{1/4}$ [expression (4.13)].

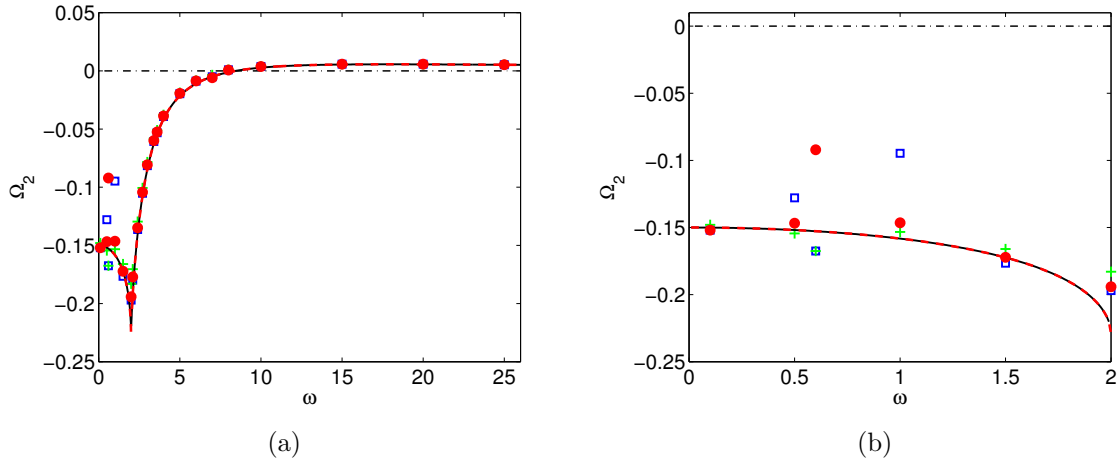


FIGURE 4.15 – (a) Vitesse angulaire $\Omega_2 = u_{\theta,2}/r$ associée à l'écoulement zonal, en fonction de la fréquence de libration ω dans un cylindre de rapport d'aspect $\alpha = 2$ pour $E = 4 \times 10^{-5}$ et $\varepsilon = 0,05$. La courbe noire représente l'expression (4.11) ou (4.12). La courbe rouge en pointillés est l'expression (3.43). Les valeurs numériques sont mesurées en $(r = 0,2; z = 0,2)$: carrés bleus ; en $(r = 0,4; z = 0,2)$: cercles rouges ; en $(r = 0,6; z = 0,2)$: croix vertes. (b) est une vue rapprochée de (a) dans la région où les modes inertiels sont présents.

obtenue par Wang peut être retrouvée comme un cas particulier du calcul effectué dans le chapitre précédent (relation 3.43).

4.3 Analogie entre forçage temporel et forçage azimuthal

Nous venons de vérifier la validité de la correction non-linéaire générée par un forçage de libration longitudinale, i.e. dépendant du temps, dans un conteneur axisymétrique. Nous pouvons alors nous demander si d'autres types de forçage vont pouvoir générer un écoulement similaire. Pour cela, après avoir étudié un forçage harmonique temporel axisymétrique imposé par une oscillation de la vitesse angulaire du cylindre, nous considérons le cas d'un forçage harmonique azimuthal dans un cylindre en rotation.

4.3.1 Dispositif expérimental équivalent

Ici, au lieu de générer une variation temporelle de l'écoulement, nous voulons induire une variation azimuthale du champ des vitesses. Ce problème n'est pas totalement nouveau, il a été étudié par Suess (1970, 1971) dans le cas d'une sphère soumise à un forçage de marées. Malheureusement, en géométrie sphérique la condition aux limites est compliquée à définir. En pratique, Suess (1971) a modélisé le forçage de marées par un écoulement dans une sphère avec une vitesse azimuthale variable à la paroi et de la forme

$$\mathbf{V}_\Sigma = r \left[1 + \frac{\beta}{2} \cos(2\phi) \right] \mathbf{e}_\phi \quad (4.14)$$

Un premier problème apparaît ici : l'écoulement au voisinage de la paroi ne vérifie pas la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Néanmoins la dynamique principale semble demeurer identique à celle d'un forçage de précession (Busse, 1968b) ou d'un forçage de libration longitudinale (Busse, 2010a; Sauret & Le Dizès, 2013). Pour vérifier ceci et nous affranchir du problème des conditions aux limites, nous considérons le système "hypothétique" représenté en figure 4.16. Dans ce système, un cylindre déformable tourne à la vitesse angulaire constante Ω_{spin} et est déformé elliptiquement par deux rouleaux tournant à une vitesse angulaire Ω_{orb} . Le système, en l'absence des disques cylindriques internes, a été utilisé par Eloy (2000) pour l'étude de l'instabilité elliptique. Les mesures expérimentales lui ont permis de montrer que l'écoulement théorique que nous allons présenter dans la suite est en accord avec le champ de vitesses observé. Une fois cet écoulement elliptique généré, nous voulons nous affranchir des effets induits par les coins qui peuvent modifier l'écoulement, comme nous venons de le voir dans le cas de la libration longitudinale. Bien qu'un tel système génère déjà un écoulement zonal par forçage de marées, nous allons étudier une situation modèle plus simple mais qui traduit la physique du phénomène. Nous plaçons deux cylindres intérieurs coaxiaux tournant également à la vitesse Ω_{spin} dans l'écoulement elliptique généré. Ainsi, dans les régions (I) et (II), l'écoulement se fait suivant des lignes de courant elliptiques, de plus la vitesse est variable le long de ces lignes de

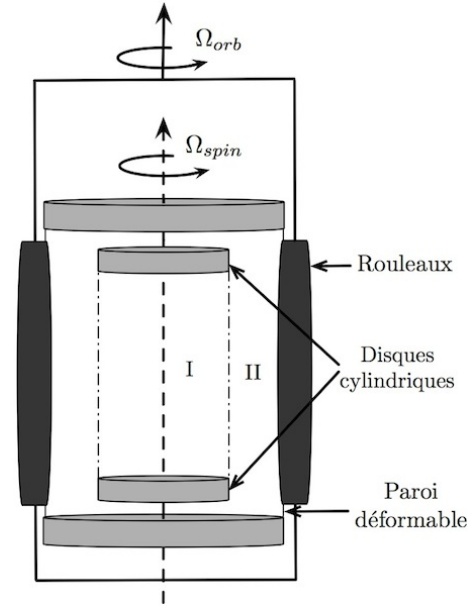


FIGURE 4.16 – Dispositif expérimental permettant d'étudier l'effet d'un forçage elliptique.

courant. Mais, cet écoulement doit également satisfaire les conditions aux limites sur les deux disques cylindriques supérieur et inférieur : une couche limite se forme donc sur ces parois, de manière analogue à la situation étudiée par Wang (1970).

Notons que dans le cas d'une sphère, le forçage de marées génère également des lignes de courant elliptiques (Suess, 1971). La vitesse est variable le long de ces lignes de courant, ce qui n'est pas le cas sur les parois extérieures : il se crée alors une couche visqueuse. Cette situation génère le même mécanisme physique que celui étudié dans cette partie. Mais, dans le cas présent, nous n'avons pas à formuler d'hypothèses sur la forme du conteneur, ni à introduire une vitesse variable au niveau des parois. Nous allons considérer ici le cas générique d'un forçage multipolaire (n quelconque).

4.3.2 Formulation mathématique

Considérons l'écoulement dans le cylindre extérieur déformable de rayon R_{ext} en rotation autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante Ω_{spin} . Ce cylindre est rempli avec un fluide incompressible de viscosité cinématique ν et masse volumique ρ . Un forçage multipolaire, en rotation à la vitesse angulaire Ω_{orb} , est appliqué sur le cylindre. Le rayon de la paroi déformable du cylindre extérieur vérifie

$$R_{ext}^{def}(\theta) = R_{ext} [1 + \beta \cos(n\theta)], \quad (4.15)$$

où β and n sont respectivement l'amplitude et la fréquence azimutale de la déformation. Des exemples de déformation multipolaire ont été présentés figure 1.21 dans la section 1.3.2. Notons que le cas $n = 2$ correspond à un forçage elliptique, ou de marées, comme rencontré dans les applications astrophysiques. Nous définissons $\Omega_R = \Omega_{orb}/\Omega_{spin}$ qui représente le rapport entre la vitesse angulaire de la déformation, appelée vitesse orbitale, et la vitesse de rotation du cylindre, appelée vitesse de spin. Le cas particulier $\Omega_R = 1$ correspond à un cylindre elliptique en rotation alors que le cas $\Omega_R = 0$ représente une déformation fixe dans le référentiel inertiel.

De plus, comme annoncé précédemment pour simplifier le problème et utiliser des conditions aux limites bien définies, nous considérons deux disques de rayon R séparés par une distance H . Ces deux plaques tournent autour de l'axe (Oz) à une vitesse angulaire égale à celle du cylindre extérieur, Ω_{spin} (figure 4.16).

La résolution analytique de ce problème est présentée en annexe B.

4.3.3 Discussion

La résolution de ce problème permet de montrer qu'un écoulement non-linéaire, axisymétrique et stationnaire est généré entre les deux disques. Cet écoulement est similaire au vent zonal généré par un forçage temporel axisymétrique (i.e. libration longitudinale) dans un cylindre. L'écoulement non-linéaire obtenu s'écrit

$$u_{\theta,2} = \beta^2 r \Omega_2(r) \quad (4.16)$$

où Ω_2 est donné par

$$\Omega_2 = -\frac{r^{2n-4} (n-1)^2 (1-\Omega_R)^2 [1 - S [2 + S (10\sqrt{S} - 2S - 9)]]}{2 (4S^2 + 1) (S^2 - 1)} \quad (4.17)$$

pour $S = n(1 - \Omega_R)/2 - 1 > 0$. Pour $S < 0$, la solution devient

$$\Omega_2 = -\frac{r^{2n-4} (n-1)^2 (1-\Omega_R)^2 (1 + S [2 + 10S^{3/2} + 9S - 2S^2])}{8S^4 - 6S^2 - 2} \quad (4.18)$$

Nous discutons plus en détails ce résultat en annexe B, mais le résultat important ici est que l'écoulement varie toujours comme le carré de l'amplitude de forçage et est indépendant du nombre d'Ekman. Ainsi, un forçage azimutal et un forçage temporel conduisent aux mêmes effets dans le volume à travers les interactions non-linéaires dans les couches visqueuses sur les parois lorsque l'écoulement en volume ne satisfait pas la condition aux limites appliquée à la paroi. Nous n'avons pas effectué le calcul en géométrie sphérique car dans ce cas les conditions aux limites à appliquer sont plus complexes. Néanmoins le même résultat est attendu en géométrie sphérique et les mêmes conclusions que celles obtenues au chapitre précédent, en présence d'un noyau interne, sont suspectées être valables pour un forçage de marées.

4.4 Libration longitudinale d'un conteneur non-axisymétrique

Nous venons de voir que le vent zonal généré par libration longitudinale est valable dans différents conteneurs axisymétriques. De plus, nous avons établi dans la section précédente que le mécanisme de génération du vent zonal peut s'extrapoler à un forçage azimutal. Nous pouvons maintenant nous poser une question : que se passe-t-il si nous couplons un forçage de libration longitudinale avec des effets topographiques, par exemple avec un forçage de marées. Cette situation expérimentale a été étudiée très récemment par (Noir *et al.*, 2012). Nous avons pu contribuer à expliquer les observations découlant des mesures expérimentales.

Jusqu'à maintenant, les expériences, simulations numériques et études analytiques que nous avons évoquées traitent de conteneurs axisymétriques pour étudier le rôle du couplage visqueux dans les planètes soumises à un forçage de libration. Nous avons montré théoriquement que le vent zonal généré par le forçage de libration longitudinale est axisymétrique et stationnaire et qu'il est induit par un couplage non-linéaire dans les couches d'Ekman (Wang, 1970; Busse, 2010a; Sauret & Le Dizès, 2013). Néanmoins, assimiler un satellite à une sphère est restrictif : il est en réalité déformé par les marées. La forme générale adoptée par ce satellite est un ellipsoïde triaxial avec un aplatissement non-nul et un bourrelet au niveau de l'équateur induit par les marées qui pointe vers son principal attracteur (Goldreich & Mitchell, 2010). Ceci suppose que la période de libration est bien plus petite que l'échelle de temps caractéristique de déformation de la planète. Dans ce cas, on modélise le satellite par un ellipsoïde rigide soumis à un forçage de libration longitudinale autour de son axe. Notons que, par contraste avec les géométries sphérique et cylindrique, Zhang *et al.* (2011) ont montré analytiquement et numériquement (Chan *et al.*, 2011b) que la libration longitudinale d'un ellipsoïde rigide ne pouvait pas produire de résonance d'ondes inertielles même si les amplitudes et les fréquences de libration longitudinale sont exactement identiques à celles de modes inertielles non-axisymétriques. Ils soulignent également que l'absence de résonance dans cette géométrie est physiquement raisonnable car si $\mathbf{u}(r, \theta) \exp(2i\phi - \omega t)$ représente la solution d'un mode inertiel sphérique, alors $\mathbf{u}(r, \theta) \exp(2i\phi + \omega t)$ ne peut pas être également solution (Zhang *et al.*, 2001). C'est-à-dire que tout les modes inertiels de période azimutale $m = 2$ sont sous la forme d'ondes se propageant en azimut, ce qui implique que tout les mouvements oscillants non-axisymétriques dans une cavité ellipsoïdale, ne peuvent pas résonner avec des modes inertiels voyageant dans une direction particulière.

Dans cette partie, nous décrivons tout d'abord le système considéré puis les expériences menées par J. Noir. Nous utilisons la théorie développée au chapitre précédent pour expliquer les observations expérimentales du vent zonal. Puis, à partir d'un modèle numérique d'ellipsoïde triaxial, nous discutons de la structure précise du vent zonal dans un ellipsoïde et proposons le principe du calcul analytique.

4.4.1 Formulation mathématique

Nous considérons toujours un fluide homogène et incompressible, mais cette fois contenu dans une cavité ellipsoïdale soumise à un forçage de libration longitudinale (figure 4.17 ci-contre). L'équation générale de la surface de l'ellipsoïde est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (4.19)$$

où (x, y, z) est le système de coordonnées cartésiennes avec son origine au centre de l'ellipsoïde. Le vecteur \mathbf{e}_x est selon l'axe équatorial majeur a , \mathbf{e}_y est selon l'axe équatorial mineur b , et \mathbf{e}_z est selon l'axe de rotation c . Nous pouvons alors définir l'ellipticité β par

$$\beta = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \quad (4.20)$$

et le rapport d'aspect de l'ellipsoïde

$$c^* = \frac{c}{R}, \quad (4.21)$$

où R est le rayon équatorial moyen $R = \sqrt{(a^2 + b^2)}/2$. Dans le référentiel inertiel, nous considérons un mouvement de libration longitudinale :

$$\Omega(t) = 1 + \varepsilon \sin(\omega t). \quad (4.22)$$

Dans les expériences menées par J. Noir, à l'inverse de celles présentées au début de chapitre, l'angle de libration du conteneur durant une période, $\Delta\phi$ est fixé (et s'exprime en radians). Nous pouvons relier la valeur de $\Delta\phi$ à l'amplitude de libration que nous avons utilisée auparavant par la relation $\varepsilon = \Delta\phi\omega$ où ω est toujours la fréquence de libration adimensionnée.

En utilisant respectivement a et Ω_0^{-1} comme échelles de longueur et de temps, les équations de Navier-Stokes et de continuité s'écrivent dans le référentiel attaché au conteneur :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2[1 + \varepsilon \sin(\omega t)] \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + \varepsilon \omega \cos(\omega t) (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) = -\nabla p + E \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (4.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (4.24)$$

Ce référentiel est en libration mais permet de garder la forme du conteneur fixe dans le repère correspondant. Notons l'apparition de deux termes :

- $\varepsilon \omega \cos(\omega t) (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r})$, qui représente la force de Poincaré induite par la vitesse angulaire non constante du référentiel en rotation ;
- $2\varepsilon \sin(\omega t) \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}$ qui apparaît dans la force de Coriolis.

p est la pression, qui prend en compte l'accélération centrifuge et E est défini par rapport à a :

$$E = \frac{\nu}{\Omega_0 a^2}. \quad (4.25)$$

La solution visqueuse à l'équation (4.23) doit satisfaire les conditions de non-glissement sur la paroi extérieure, ce qui se traduit par

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad x^2 + \frac{1+\beta}{1-\beta} y^2 + \frac{1+\beta}{c^2} z^2 = 1. \quad (4.26)$$

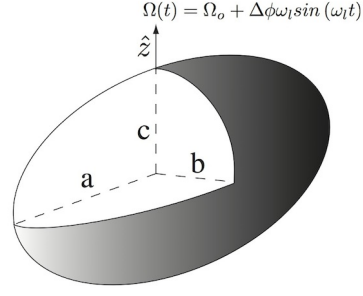


FIGURE 4.17 – Représentation schématique d'un ellipsoïde triaxial.

Dans la limite des petits nombres d'Ekman, nous pouvons décomposer l'écoulement en une partie non visqueuse, \mathbf{U} , dans le volume et un écoulement dans la couche limite, \mathbf{u} . En introduisant cette séparation, [Kerswell & Malkus \(1998\)](#) ont donné la solution non-visqueuse à ce problème avec des conditions de non-pénétration sur la paroi extérieure :

$$\mathbf{U} = -\varepsilon \sin(\omega t) (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r} - \beta \nabla(xy)), \quad (4.27)$$

$$p = -\varepsilon \omega \beta xy \cos(\omega t) + \varepsilon \sin(\omega t) [1 + \sin(\omega t)] (|\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}|^2 + \beta(x^2 - y^2)). \quad (4.28)$$

Le calcul du terme non-linéaire $(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}$ à l'aide du champ des vitesses (4.27) met en évidence que la contribution dans le volume ne génère pas d'écoulement zonal. Physiquement, les forces inertielles générées dans le volume par la libration longitudinale sont compensées entièrement par le gradient de pression dans le fluide. Par contre, les conditions de non-glissement (8.4) ne sont pas satisfaites par la solution (4.27). Ainsi, des corrections visqueuses dans les couches d'Ekman doivent être considérées et vont pouvoir générer un écoulement zonal dans le volume comme observé en géométrie axisymétrique ([Wang, 1970](#); [Busse, 2010a](#); [Sauret & Le Dizès, 2013](#)).

4.4.2 Méthode expérimentale

Le montage expérimental, utilisé par J. Noir pour obtenir les résultats expérimentaux présentés dans cette section, est constitué d'une table tournante à la vitesse angulaire constante Ω_0 sur laquelle est centré un conteneur ellipsoïdal qui oscille au cours du temps. Pour caractériser les effets du couplage topographique induit par la non axisymétrie, trois différents conteneurs ont été utilisés i) une sphère de rayon $a = 127$ mm, ii) un sphéroïde prolata d'axe majeur $a = 127$ mm et d'axe mineur $b = c = 119$ mm et iii) un second ellipsoïde prolata mais d'axe majeur $a = 127$ mm et d'axe mineur $b = c = 89$ mm. Ces dimensions conduisent respectivement à une ellipticité dans le plan équatorial, β égale à 0, 0,06 et 0,34. Dans les trois configurations, l'axe de rotation est selon c .

Afin de caractériser l'écoulement, du colorant a été injecté à une distance $r_i \sim 0,38$ du centre, le long de l'axe mineur à l'équateur (figure 4.18(a)). Puis le trajet du colorant a été suivi manuellement durant une révolution entière jusqu'à ce qu'il passe de nouveau par le point d'injection. Ces observations permettent d'avoir une estimation de la vitesse angulaire moyenne le long de la ligne de courant suivi par le colorant comme illustré sur la figure 4.18(c). Pour de plus amples détails nous renvoyons à l'article de [Noir et al. \(2012\)](#). Cette méthode n'est pas utilisable quand la vitesse azimutale varie plus rapidement qu'une période de rotation du colorant. Ainsi, des mesures par Laser Doppler Anemometry (LDA) ont été effectuées (voir [Noir et al., 2010](#), pour une description de la méthode). Pour palier aux problèmes induits par la différence d'indice entre l'eau, l'air et la matière du conteneur (acrylique), les mesures par LDA ont été effectuées dans un système où le demi-ellipsoïde supérieur a été remplacé par une plaque plane (figure 4.18(b)). Comme nous allons le voir dans la suite, nous conservons tout de même la physique du phénomène observé.

Nous rappelons que ces expériences ont été menées par J. Noir et ne détaillons donc pas précisément toute la méthodologie expérimentale qui peut être trouvée dans [Noir et al. \(2012\)](#). Dans toutes ces expériences le nombre d'Ekman est constant et égal à $E = 2 \times 10^{-5}$, la fréquence de libration se situe dans la gamme $\omega \in [0,5; 2]$. Trois ellipticités différentes ont été considérées : $\beta = 0,34$, $\beta = 0,06$ et $\beta = 0$ et l'amplitude de libration est comprise entre $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = 1,6$.

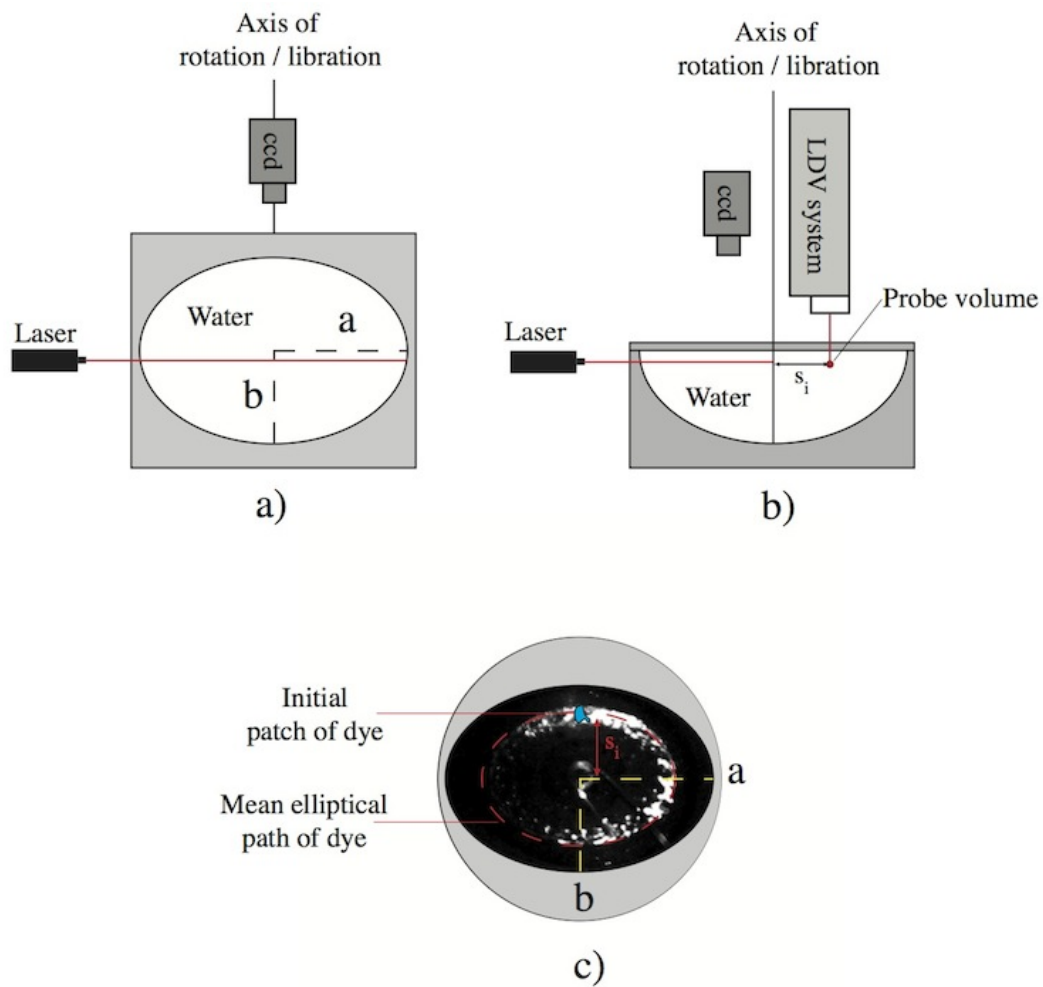


FIGURE 4.18 – Vue schématique du conteneur. a) Vue de coté du conteneur entier. b) Vue du coté de la géométrie utilisée pour les mesures LDA. c) Vue du dessus pour le conteneur entier et le demi-conteneur. L'ellipsoïde en pointillés rouges représente le trajet du colorant injecté.

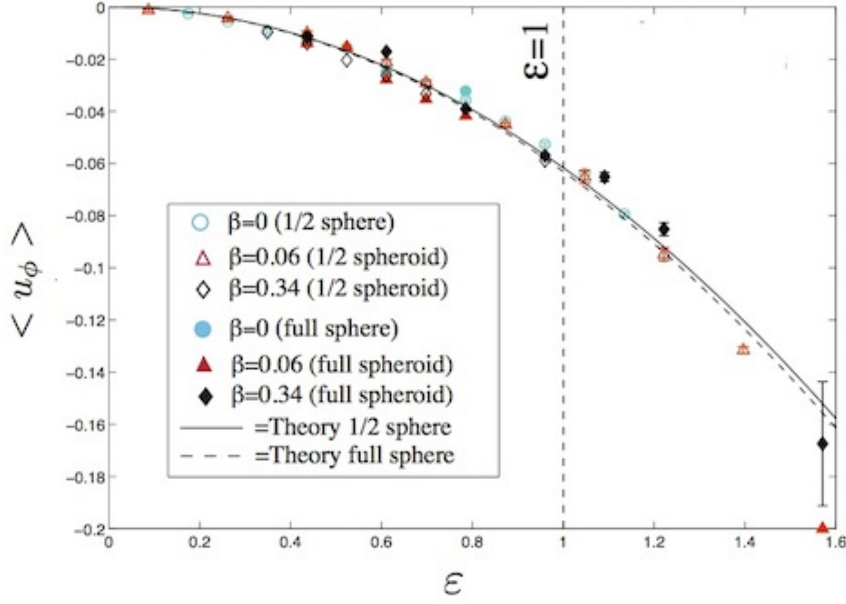


FIGURE 4.19 – Vent zonal en $r = 0,38$ fonction de l’amplitude de libration ε pour 6 géométries : hémisphère (cercle bleu vide), sphère entière (cercle bleu plein), 1/2 sphéroïde avec $\beta = 0,06$ (triangle rouge vide), sphéroïde entier avec $\beta = 0,06$ (triangle rouge plein), 1/2 sphéroïde avec $\beta = 0,34$ (losange noire vide), sphéroïde entier avec $\beta = 0,34$ (losange noir plein). Le vent zonal moyen est estimé par suivi de colorant pour un conteneur entier et par LDA pour les demi-conteneurs.

4.4.3 Résultats et comparaisons

La figure 4.19 présente l’amplitude de l’écoulement moyennée dans le temps obtenue en $r_i = 0,38$ par visualisation directe ou par mesure LDA, pour un nombre d’Ekman $E = 2 \times 10^{-5}$, une fréquence de libration $\omega = 1$ et une amplitude de libration variant entre 0,05 et 1,6. Dans tous les cas présentés ici, l’écoulement zonal est rétrograde au point de mesure. De plus, aucune variation importante de l’amplitude du vent zonal n’est visible entre les six configurations étudiées (conteneur entier, $\beta = 0$; 0,06; 0,34; demi-conteneur $\beta = 0$; 0,06; 0,34). Ces résultats expérimentaux suggèrent que l’ellipticité a une influence secondaire et que le mécanisme responsable du vent zonal dans le volume demeure le couplage visqueux sur les parois extérieures. Nous avons montré au chapitre précédent que pour un écoulement généré par les interactions non-linéaires dans la couche limite, le vent zonal varie en $\varepsilon^2 = (\Delta\phi\omega)^2$. Nous pouvons alors superposer, aux résultats expérimentaux, le résultat théorique obtenu au chapitre précédent : les courbes noires continue et en pointillés sur la figure 4.19 représentent respectivement la solution analytique dans une sphère et dans un hémisphère pour une fréquence de libration $\omega = 1$. Le cas de l’hémisphère est simplement obtenu en considérant une couche limite sphérique couplée à une couche limite plane. Nous obtenons, avec la solution analytique en $r = 0,38$, une variation en $\alpha \varepsilon^2$, avec $\alpha = -0,1622$ pour un hémisphère et $\alpha = -0,1660$ pour une sphère, en bon accord avec les observations expérimentales. Les interactions non-linéaires dans le volume sont négligeables, d’ordre $O(E)$. Ceci a été discuté au chapitre précédent et récemment montré par [Calkins et al. \(2010\)](#) dans leur étude numérique d’une coquille sphérique en libration. Il n’est donc pas surprenant que les conteneurs entiers et les demi-conteneurs, qui diffèrent seulement par une paroi plate ou concave, produisent un écoulement zonal qualitativement similaire. Notons que pour

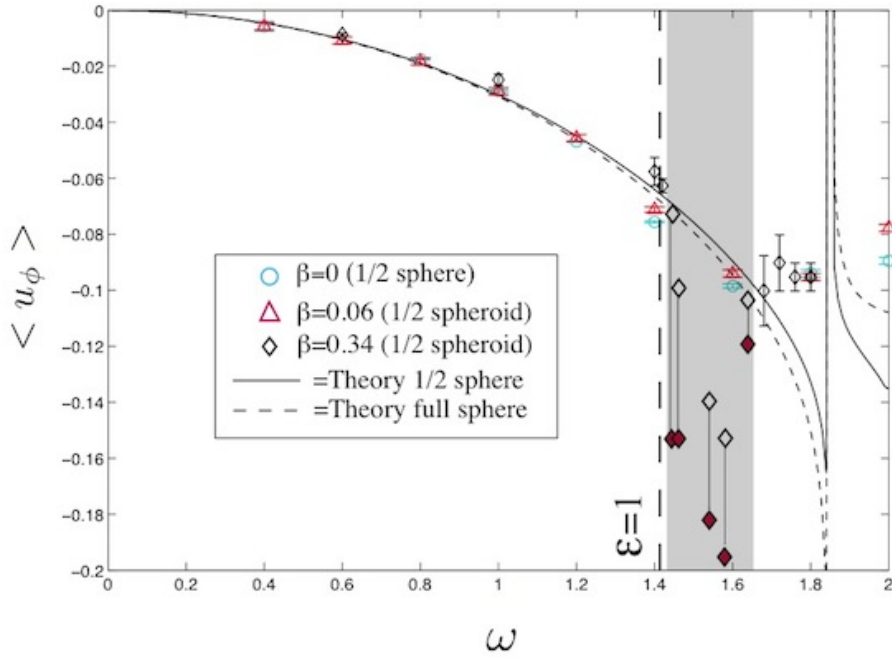


FIGURE 4.20 – Vent zonal en $r = 0,38$ mesuré par LDA en fonction de la fréquence de libration ω pour $\Delta\phi = 0,7$ rad (soit $\varepsilon = 0,7\omega$) et pour trois géométries différentes : hémisphère (cercle bleu), 1/2 sphéroïde avec $\beta = 0,06$ (triangle rouge), 1/2 sphéroïde avec $\beta = 0,34$ (losange noire vide), sphéroïde entier avec $\beta = 0,34$ (losange noir). La bande noire pour $\omega \in [1,43; 1,66]$ représente la gamme de fréquences où on observe un régime intermittent turbulent-laminaire. La courbe solide représente la théorie pour une demi-sphère et la courbe en tirets la théorie pour la sphère entière.

$\varepsilon \gtrsim 1$, nous observons un écoulement zonal légèrement plus faible en amplitude que la prédiction faiblement non-linéaire. Nous suspectons que ce comportement est induit par la limitation de la théorie : pour $\varepsilon \gtrsim 1$, l'approche asymptotique n'est plus valide et des effets d'amplitude finie doivent être introduits.

Sur la figure 4.20, nous avons représenté les mesures LDA de l'écoulement zonal en fonction de la fréquence de libration pour $E = 2 \times 10^{-5}$ et une amplitude angulaire de libration fixe $\Delta\phi = 0,7$ rad. Toutes ces mesures, effectuées par J. Noir, ont été faites dans un demi-conteneur. Nous avons superposé à ces résultats expérimentaux la solution analytique calculée à l'aide des formules (A.14) et (A.16) données en annexe A. Encore une fois, l'accord avec la théorie est très bon pour des fréquences $\omega < 1,4$. La variation brutale de l'amplitude du vent zonal pour une fréquence de $\omega \sim 1,66$ est due à la présence d'une latitude critique à la position $r = 0,38$. Pour tous les paramètres expérimentaux étudiés, nous n'observons que peu de différences entre les différents demi-conteneurs d'ellipticité $\beta = 0$ et $\beta = 0,06$: l'écoulement demeure laminaire et les résultats expérimentaux sont en accord avec le vent zonal rétrograde prédit par le mécanisme d'interaction non-linéaire dans la couche visqueuse étudié au chapitre précédent. C'est également le cas pour une ellipticité $\beta = 0,34$ et une fréquence de libration $\omega < 1,43$ et $\omega > 1,66$. À l'inverse, pour $\beta = 0,34$ et $\omega \in [1,43; 1,66]$, nous observons un régime intermittent où le vent zonal peut avoir une amplitude grande ou petite. Notons que les barres d'incertitudes représentent les fluctuations de l'écoulement zonal autour de sa valeur moyenne sur toute une série temporelle. Dans la bande de régimes intermittent, cette méthode n'a aucun sens. Au lieu de cela nous représentons la valeur la plus faible du vent zonal par des losanges vides et la valeur la plus grande par des losanges pleins. Pour $\omega \in [1,43; 1,66]$ la turbulence présente dans tout le volume entraîne

un écoulement zonal plus important qui n'est plus décrit par la théorie du chapitre précédent qui suppose un écoulement laminaire. Ce phénomène d'instabilité apparaît dans une bande spécifique de fréquences et uniquement pour le conteneur avec la plus grande ellipticité équatoriale, $\beta = 0,34$. Puisque cette instabilité n'apparaît que pour le conteneur de plus grande ellipticité, elle doit résulter d'un couplage topographique et non du couplage visqueux. Bien que la gamme de paramètres accessibles dans cette expérience n'a pas permis d'étudier en détail le mécanisme à l'origine du régime turbulent, plusieurs explications peuvent être avancées. En comparant les figures 4.19 et 4.20 pour $\varepsilon > 1$, les résultats expérimentaux suggèrent que le seuil de l'instabilité n'est pas caractérisé par une amplitude critique, ε_c . En effet, pour $\omega = 1$ le régime turbulent n'est pas observé quel que soit le conteneur utilisé, même pour l'amplitude de libration la plus grande accessible dans les expériences ($\varepsilon \sim 1,6$). A l'opposé, le régime turbulent est observé dans le conteneur de plus grande ellipticité dans une gamme donnée de fréquences $\omega \in [1,43; 1,66]$, qui correspond à $\varepsilon \in [1; 1,16]$. Ceci souligne le rôle particulier de l'ellipticité et de la fréquence sur le mécanisme de déstabilisation. Ces résultats suggèrent que le mécanisme responsable de la déstabilisation n'est pas induit par le cisaillement. Or, dans un conteneur elliptique en rotation rapide, un écoulement turbulent suivi d'une relaminarisation de l'écoulement dans une bande particulière de fréquences est souvent typique de l'instabilité elliptique (Malkus, 1989). Ce phénomène d'instabilité elliptique induite par libration longitudinale dans un ellipsoïde triaxial ou biaxial, appelé LDEI, a fait l'objet d'un papier récent par Cébron *et al.* (2012c) mais sort du cadre de l'étude des phénomènes non-linéaires et des vents zonaux.

En résumé, la confrontation de notre théorie avec les mesures expérimentales effectuées par J. Noir montre que :

- Pour une fréquence fixe, $\omega = 1$, l'écoulement dans le volume reste laminaire pour toutes les amplitudes de libration ε quelle que soit la géométrie du conteneur. Dans ce régime laminaire, un écoulement zonal, qui semble indépendant de la géométrie, est présent. Cet écoulement est très bien capturé en extrapolant le vent zonal dans la sphère obtenu au chapitre précédent.
- Pour une amplitude angulaire de libration fixée, $\Delta\Phi = 0,7$ rad, la théorie précédente capture également bien l'écoulement généré dans la sphère et dans l'ellipsoïde de plus faible ellipticité. Nous décrivons également bien, à l'aide de notre théorie, l'écoulement dans le conteneur de plus grande ellipticité pour des fréquences $\omega < 1,43$. Mais une instabilité elliptique induite par la libration apparaît pour $\omega \in [1,43; 1,66]$ et dans ce cas-là, l'écoulement dans le volume est directement associé à l'instabilité (voir Cébron *et al.*, 2012c).

Aux échelles planétaires, deux scénarios sont possibles. En l'absence de résonance, le couplage topographique ne modifie pas de manière importante le vent zonal généré par les interactions non-linéaires dans la couche limite. Ceci conduit à un écoulement laminaire et un vent zonal indépendant du nombre d'Ekman de l'écoulement et qui varie comme le carré de l'amplitude de libration. Comme suggéré par Calkins *et al.* (2010), une telle dynamique ne conduit pas à une dissipation d'énergie importante ou à la génération d'un champ magnétique. Par contre, si l'influence de la topographie permet de générer de la turbulence dans le volume, une plus grande dissipation est possible. Ce mécanisme, induit par l'instabilité elliptique, a été traité numériquement par Cébron *et al.* (2012c).

4.4.4 Étude numérique

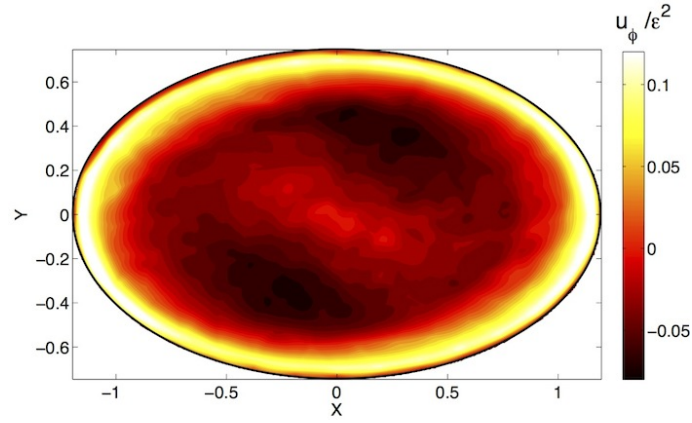
Pour compléter l'étude expérimentale menée par J. Noir, nous avons effectué des simulations numériques dans un ellipsoïde en libration longitudinale. Nous avons utilisé pour cela le logiciel Comsol Multiphysics[®] basé sur une méthode d'éléments finis. Cette méthode est adaptée pour l'étude de conteneur déformé elliptique (voir par exemple l'étude de l'instabilité elliptique menée par Cébron *et al.*, 2010a). Nous nous plaçons dans le référentiel en libration où la forme ellipsoïdale du conteneur est stationnaire et nous résolvons les équations du mouvement (4.23) avec des conditions de non-glissement (ou de glissement) à la paroi extérieure. Cébron *et al.* (2012c) montrent une application de cette méthode pour décrire l'apparition de la LDEI. Nous renvoyons à cet article et à l'article de Cébron *et al.* (2010a) pour plus de détails sur la méthode numérique. Le nombre d'Ekman accessible dans les simulations 3D d'un ellipsoïde triaxe avec notre méthode est relativement limité, typiquement $E > 10^{-4}$. Nous avons vu dans le cas de la sphère que la structure du vent zonal est correctement décrite, pour $\omega > 2$, et $E > 10^{-3}$ (figure 4.5(a)). Ici, nous considérons numériquement une fréquence de libration $\omega = 2,1$ et un nombre d'Ekman $E = 5 \times 10^{-4}$. Notons que la condition $\omega \gg \sqrt{E}$ est toujours satisfaite. Nous utilisons une amplitude de libration et une déformation assez conséquente, respectivement $\varepsilon = 0,4$ et $\beta = 0,34$ afin que les effets non-linéaires aient une amplitude notable.

Les figures ??(a) et ??(b) montrent les champs de vitesses azimutale et radiale dans le plan équatorial $z = 0$ pour des conditions de non-glissement à la paroi extérieure. Ces figures ont été obtenues en moyennant les champs de vitesses sur un nombre entier de périodes dans le référentiel en libration. Dans ce référentiel, le couplage topographique génère un terme d'ordre ε non-nul, proportionnel à $\cos(\omega t)$ (relation 4.27). Mais celui-ci a une moyenne temporelle nulle et nous mesurons donc la correction non-linéaire, stationnaire. Un écoulement azimutal est toujours présent, illustré sur la figure ??(a), mais a une structure plus complexe qu'auparavant. Celui-ci n'est plus axisymétrique mais présente une symétrie elliptique, $m = 2$. Nous remarquons que, comme dans le cas de la sphère, la vitesse est rétrograde près du centre puis prograde au voisinage de la paroi extérieure. Nous remarquons également la présence de la symétrie $m = 2$ pour le champ de vitesse radiale sur la figure ??(b). Ce motif est associé à un effet d'étirement dans le volume et illustre, une fois de plus, le fait que l'écoulement stationnaire généré est elliptique.

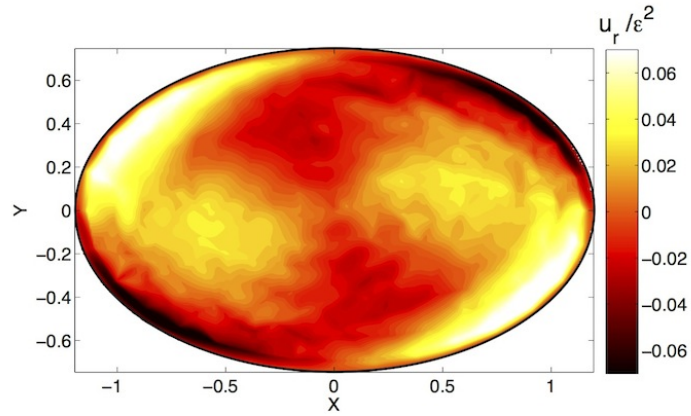
Une fois l'écoulement stationnaire obtenu, nous pouvons mesurer le taux de rotation associée sur un cercle de rayon $r = 0,38$. Le résultat est présenté en figure 4.22(a). La symétrie $m = 2$ observée qualitativement apparaît ici plus clairement : une modulation du taux de rotation en fonction de l'angle θ est visible. Le taux de rotation, $\Omega_2 = u_\phi/(\rho \varepsilon^2)$, oscille entre deux valeurs $\Omega_2 \simeq -0,06$ et $\Omega_2 \simeq -0,18$. Une mesure expérimentale effectuée par J. Noir⁴, permet de mettre en évidence cette symétrie. La mesure, effectuée en $r = 0,38$ dans le référentiel du laboratoire, permet de tracer la même grandeur. Notons qu'ici la composante radiale peut également apporter une contribution non-négligeable. Néanmoins, sur un demi-cercle ($\theta = 180^\circ$), la même symétrie est présente et montre l'influence de la topographie elliptique sur l'écoulement zonal généré.

Nous pouvons alors essayer de relier le champ de vitesses obtenu numériquement dans l'ellipsoïde en libration à la théorie développée au chapitre précédent. Nous prenons pour cela la moyenne azimutale du champ stationnaire des vitesses sur des cercles concentriques et différentes positions radiales. Nous pouvons alors tracer l'écoulement stationnaire *et* axisymétrique généré par le forçage de libration longitudinale en présence d'un couplage visqueux et topographique. Le résultat obtenu est présenté en figure 4.23. Étonnamment, le profil obtenu ressemble à celui obtenu au chapitre précédent dans le cas d'une sphère en l'absence de couplage topographique.

4. Non publiée (communication personnelle)



(a)



(b)

FIGURE 4.21 – Champs des vitesses obtenus numériquement dans le plan équatorial ($z = 0$) pour des conditions aux limites de non-glissement à la paroi extérieure et pour $\omega = 2,1$, $E = 5 \times 10^{-4}$, $\varepsilon = 0,4$, $\beta = 0,34$ et $c^* = 1$. (a) Vitesse azimutale et (b) vitesse radiale normalisée par ε^2 .

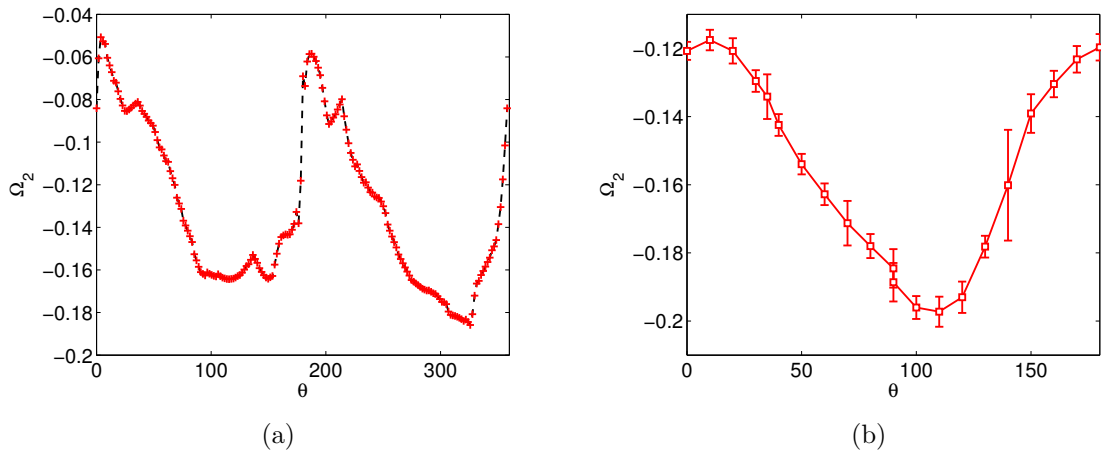


FIGURE 4.22 – (a) Vitesse moyennée dans le temps au point $r = 0,38$ obtenue numériquement pour $\omega = 2,1$, $E = 5 \times 10^{-4}$, $\varepsilon = 0,4$, $\beta = 0,34$ et $c^* = 1$ en fonction de l'angle θ . (b) Vitesse moyennée dans le temps au point $r = 0,38$ obtenue expérimentalement pour $E = 2 \times 10^{-5}$, $\omega = 1$, $\varepsilon = 0,61$ au point $r = 0,38$ (résultat expérimental de J. Noir).

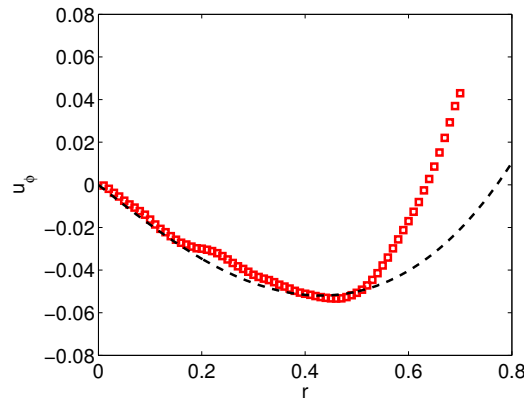


FIGURE 4.23 – Champ des vitesses obtenue numériquement pour $\omega = 2,1$, $E = 5 \times 10^{-4}$, $\varepsilon = 0,4$, $\beta = 0,34$ et $c^* = 1$ moyenné en temps et en azimuth sur θ (carrés rouges). Courbe théorique correspondant aux mêmes paramètres dans une sphère en libration obtenue par la formule (A.14) donnée en annexe A

Nous appliquons alors la formule (A.14) donnée en annexe A pour les paramètres de la simulation numérique ($\omega = 2,1$). Les profils numériques et théoriques se superposent correctement pour $\rho \leq 0,5$. Au delà de $\rho = 0,5$, la paroi extérieure est présente car notre ellipsoïde a un petit axe de taille $b = 0,6$. Un papier récent de [Chan et al. \(2011b\)](#) présente également le vent zonal résultant dans un ellipsoïde en libration longitudinale. Ces résultats, en particulier pour une faible fréquence de libration, $\omega = 0,1$, sont en accord avec ce que nous venons de présenter : l'écoulement stationnaire, moyenné en azimuth est correctement décrit par la théorie présentée au chapitre précédent.

Comme nous pouvions nous y attendre, ces résultats suggèrent que la topographie a tout de même une légère influence sur l'écoulement zonal : l'écoulement non-linéaire généré adopte la forme des parois. Elle ne modifie pas la composante axisymétrique mais induit une variation de période azimuthale $m = 2$. L'influence de la topographie seule, en l'absence de couplage visqueux, a été testée numériquement en considérant la libration dans un ellipsoïde avec des conditions

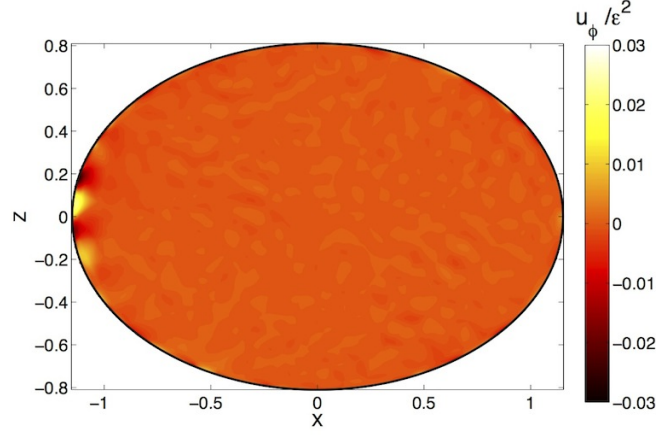


FIGURE 4.24 – Vitesse azimutale normalisée par ε^2 obtenue numériquement dans le plan équatorial ($z = 0$) pour des conditions aux limites de non-glissement à la paroi extérieure et pour $\omega = 2,1$, $E = 5 \times 10^{-4}$, $\varepsilon = 0,4$, $\beta = 0,34$ et $c^* = 1$.

de glissement à la paroi. Le champ de vitesse azimutale résultant est présenté en figure 4.24 et montre clairement que, dans ce cas, aucun vent zonal significatif est généré dans le volume.

4.4.5 Discussion

Pour résumer, nous avons montré, à l'aide de simulations numériques et d'expériences effectuées par J. Noir, que le forçage de libration longitudinale dans un ellipsoïde non-axisymétrique génère un écoulement stationnaire. Le couplage visqueux est un élément essentiel de la génération de cet écoulement. Néanmoins, la structure obtenue diffère de celle de la sphère avec la présence d'une période azimutale $m = 2$. Or, nous avons vu dans la section précédente que l'écoulement généré par un forçage azimutal a les mêmes caractéristiques que celui généré par un forçage temporel. La situation précédente peut donc être totalement décrite par une résolution analytique. Faute de temps, celle-ci n'a pas été effectuée durant cette thèse, mais le mécanisme responsable du vent zonal observé et de la symétrie $m = 2$ est présenté en figure 4.25 et fera l'objet d'études ultérieures.

L'écoulement en volume est donné par l'expression 4.27 qui satisfait les conditions de non-pénétration à la paroi extérieure, mais pas les conditions de non-glissement. Une couche visqueuse se forme alors au voisinage de la paroi extérieure de manière analogue à la situation présentée au chapitre précédent. La différence provient de la correction dans la couche limite, qui est variable dans le temps, $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}_1 \cos(\omega t) + \check{\mathbf{u}}_1 \sin(\omega t)$, mais qui contient elle-même une correction axisymétrique, $\hat{\mathbf{u}}_1$ et $\check{\mathbf{u}}_1 \propto 1$ et en plus une correction elliptique : $\hat{\mathbf{u}}_1$ et $\check{\mathbf{u}}_1 \propto e^{2i\theta}$ et $e^{-2i\theta}$. Il en résulte un champ de vitesses dans la couche limite de la forme

$$\mathbf{u} \propto \varepsilon + \varepsilon \beta e^{2i\theta} + \varepsilon \beta e^{-2i\theta} \quad (4.29)$$

L'interaction non-linéaire de cet écoulement avec lui-même dans la couche limite, va générer un écoulement stationnaire de la forme

$$\mathbf{u}_2 \propto \varepsilon^2 (1 + \beta^2) + \varepsilon^2 \beta e^{2i\theta} + \varepsilon^2 \beta e^{-2i\theta} + O(\varepsilon^2 \beta^2) \quad (4.30)$$

Finalement, l'écoulement obtenu en volume a la même structure que l'écoulement dans la couche limite :

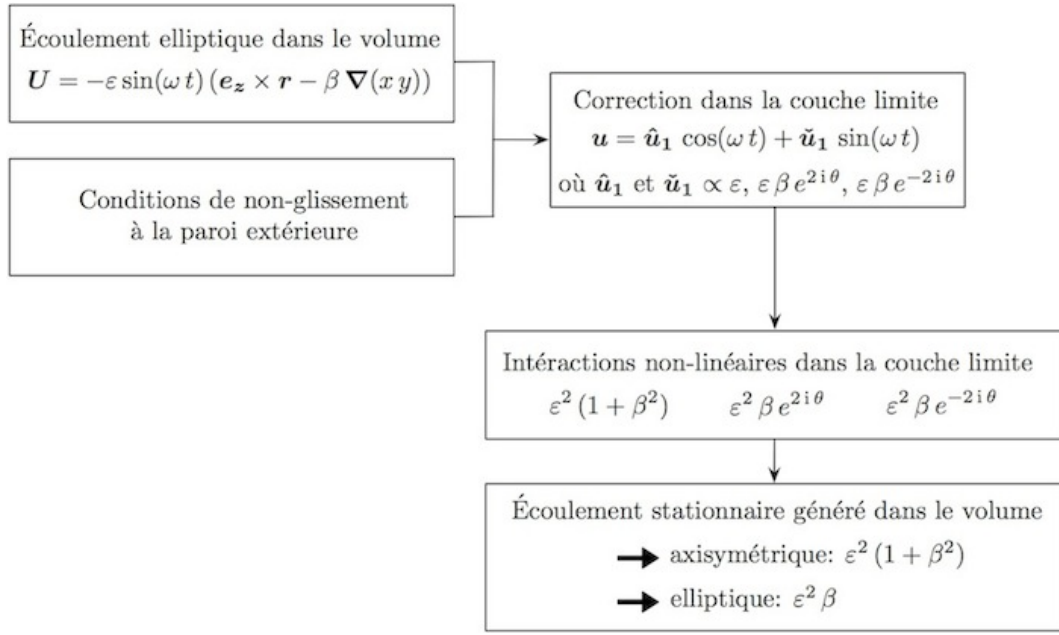


FIGURE 4.25 – Principe du calcul conduisant à l’écoulement non-linéaire stationnaire généré par un forçage de libration longitudinale dans un ellipsoïde.

- un écoulement stationnaire et axisymétrique d’ordre $\varepsilon^2 (1 + \beta^2)$. Dans la limite des petites déformations, ce terme se réduit à l’ordre ε^2 qui est exactement l’écoulement zonal obtenu au chapitre précédent.
- un écoulement stationnaire elliptique, d’ordre de grandeur $\varepsilon^2 \beta$. C’est ce terme qui fait apparaître la période azimutale $m = 2$ observée précédemment.

Dans les applications planétaires, les grandeurs ε et β sont très petites devant 1, ainsi à l’ordre dominant on retrouve le vent zonal dans une géométrie axisymétrique. Notons également que ceci peut être retrouvé en considérant l’écoulement stationnaire **et** moyenné en azimut : dans ce cas, la contribution non-axisymétrique disparaît et l’écoulement résultant est d’ordre $\varepsilon^2 (1 + \beta^2) \sim \varepsilon^2$ pour $\beta \ll 1$. Ceci explique les observations effectuées dans cette section.

4.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre la première validation quantitative de l’écoulement zonal généré par forçage de libration longitudinale dans une sphère en rotation dans le cas où la fréquence de forçage tend vers zéro. L’étude analytique présentée au chapitre précédent a également pu être validée pour toute fréquence de libration $\omega > 2$ aussi bien dans une sphère que dans une coquille sphérique contenant un noyau interne. Ces résultats sont en bon accord avec la solution asymptotique obtenue dans le volume et dans les couches de Stewartson. De plus, la solution que nous avons obtenue permet de retrouver l’écoulement zonal généré dans un cylindre (voir Wang, 1970). Puis, nous avons illustré à l’aide d’un dispositif équivalent qu’un forçage azimutal génère un écoulement zonal dont les caractéristiques sont identiques au forçage de libration longitudinale. De futures études permettront d’établir ce résultat dans une sphère soumise à un forçage multipolaire. Finalement, la libration d’un ellipsoïde a été considérée au cours d’une étude menée avec J. Noir. Nous avons montré que l’écoulement non-linéaire généré peut s’expliquer par un couplage visqueux, cohérent avec les résultats du chapitre précédent.

Nous avons toutefois illustré qu'une correction supplémentaire, induite par la topographie, est présente. Une étude expérimentale systématique de l'influence de l'ellipticité β du conteneur sur l'écoulement zonal généré et la comparaison avec le résultat théorique qui pourrait être obtenu à l'aide de la méthode présentée ci-dessus sera l'objet de futurs travaux.

Troisième partie

Instabilité centrifuge et génération spontanée d'ondes inertielles

Instabilité centrifuge

Everything should be made as simple as possible, but not simpler.

Albert Einstein

Sommaire du chapitre

5.1	Observations expérimentales et numériques	105
5.2	Première approche en géométrie cylindrique	106
5.3	Détermination théorique du seuil d'apparition de l'instabilité	108
5.4	Comparaison numérique et expérimentale	112
5.4.1	Méthodologie	112
5.4.2	Influence du nombre d'Ekman	113
5.4.3	Influence de la fréquence de libration ω	114
5.5	Conclusion	116

Dans les chapitres précédents, nous avons supposé que l'amplitude de libration longitudinale reste faible, de telle sorte que la couche visqueuse demeure stable tout au long du cycle. Dans ce chapitre, nous étudions la présence d'une instabilité au voisinage de la paroi extérieure pour des amplitudes de libration suffisamment importantes ou des nombres d'Ekman petits.

5.1 Observations expérimentales et numériques

Des expériences menées par [Noir et al. \(2009\)](#) en géométrie sphérique, pour une valeur donnée de la fréquence de libration $\omega = 1$, ont montré que différents régimes d'écoulement sont présents au voisinage de la paroi extérieure en fonction du nombre d'Ekman, E , et de l'amplitude de libration ε .

Pour un nombre d'Ekman donné, si l'amplitude de libration longitudinale est suffisamment faible, l'écoulement demeure stable (figure 5.1(a)). En augmentant l'amplitude de libration une instabilité se développe au voisinage de l'équateur (figure 5.1(b)), et finalement si l'on continue à augmenter l'amplitude, l'écoulement devient turbulent près de la paroi (figure 5.1(c)). Expérimentalement, [Noir et al. \(2009\)](#) ont établi que, juste au dessus du seuil, l'instabilité est axisymétrique et semble être d'origine centrifuge. Ils ont également proposé une loi d'échelle évaluant le seuil de stabilité reliant le nombre d'Ekman de l'écoulement, E , et l'amplitude critique

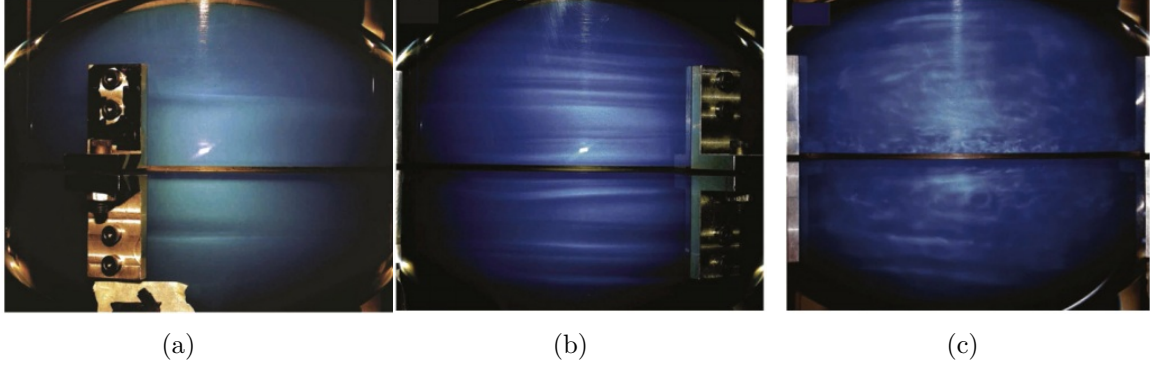


FIGURE 5.1 – Visualisation de l'écoulement induit par libration longitudinale en géométrie sphérique pour (a) un régime stable, (b) un régime centrifuge instable et (c) en présence de turbulence (figures extraites de [Noir et al. \(2009\)](#)).

de libration longitudinale, ε_c , pour laquelle apparaît l'instabilité :

$$\varepsilon_c \sim Re_{BL,cr} E^{1/2} \quad (5.1)$$

où $Re_{BL,cr}$ est une constante déterminée expérimentalement : $Re_{BL,cr} \sim 20$. Les observations expérimentales de [Noir et al. \(2009\)](#) indiquent que l'instabilité est axisymétrique juste au-dessus du seuil. On peut alors décrire la transition stable/instable par un modèle axisymétrique. Une étude numérique de [Calkins et al. \(2010\)](#), dans une coquille sphérique, a permis de retrouver la loi d'échelle proposée dans la sphère ([Calkins et al., 2010](#)) avec un coefficient légèrement différent, $Re_{BL,cr} \sim 46$. Cette différence entre les deux coefficients a été attribuée au bruit expérimental. Elle pourrait aussi provenir du comportement des particules de Kalliroscope pour décrire une instabilité périodique. Puis, [Noir et al. \(2010\)](#) ont observé expérimentalement le même comportement dans un cylindre au voisinage de la paroi latérale. Néanmoins, dans ce cas, la loi d'échelle proposée, basée sur une couche de Stewartson d'épaisseur $E^{1/4}$, s'écrit

$$\varepsilon_c \sim Re_{BL,cr} E^{3/4} \quad (5.2)$$

avec $Re_{BL,cr} \sim 250$. Nous remarquons que cette loi d'échelle diffère de celle proposée dans la sphère. Dans ce chapitre, à l'aide du modèle numérique présenté en section 2.3, nous étudions analytiquement et numériquement en géométrie cylindrique ce phénomène et proposons un critère pour l'apparition de l'instabilité centrifuge. Cette étude analytique est en accord avec les résultats expérimentaux obtenus dans la sphère et dans le cylindre par [Noir et al. \(2009, 2010\)](#). Ceci suggère que le critère d'instabilité est universel pour toute géométrie axisymétrique.

5.2 Première approche en géométrie cylindrique

Des simulations numériques, effectuées dans un cylindre, sont présentées figure 5.2 pour un nombre d'Ekman fixé, $E = 5 \times 10^{-5}$ et une fréquence de libration constante, $\omega = 0,05$. Pour une amplitude de libration, ε , plus petite que l'amplitude critique, notée ε_c , l'écoulement reste stable dans tout le cylindre (figures 5.2(a) and 5.2(b)). Dans ce cas, le fluide loin des couches limites est immobile et seul un écoulement laminaire dans la couche d'Ekman est observé. Excepté au niveau des coins du cylindre, la vitesse azimutale, u_θ , ne dépend pas de la position axiale z . En

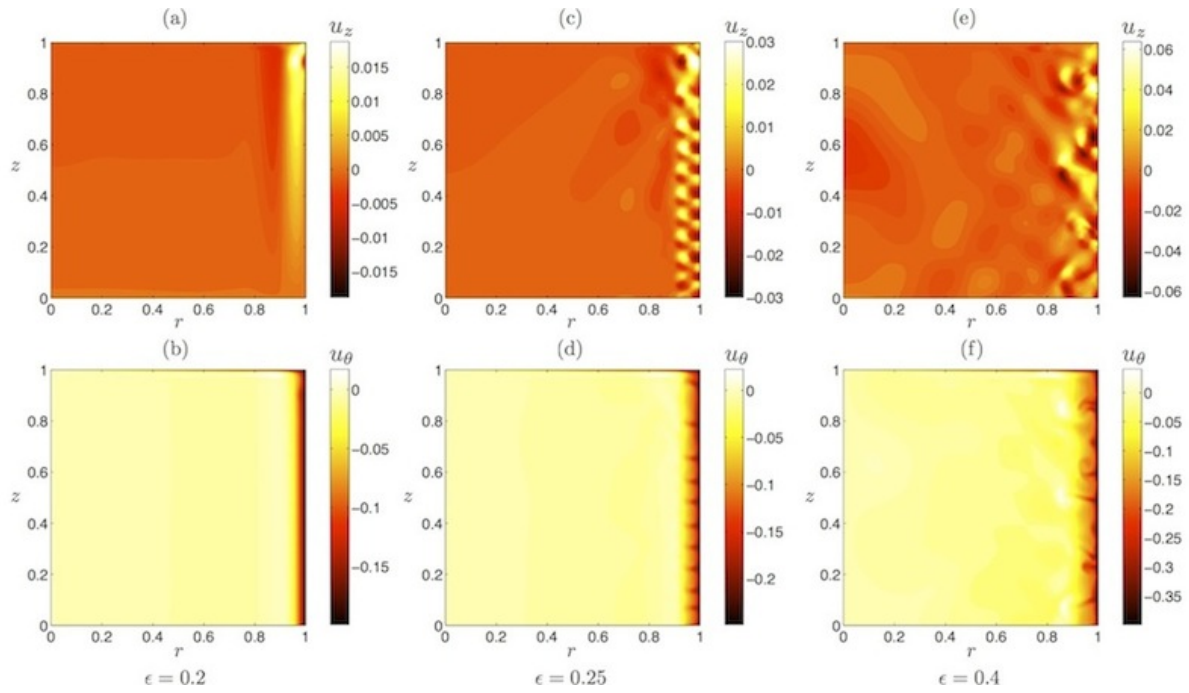


FIGURE 5.2 – Visualisations de l'écoulement généré par un forçage de libration longitudinale dans la moitié supérieure du cylindre ($0 < r < 1; 0 < z < 1$) : vitesse axiale u_z (images supérieures) et vitesse azimutale u_θ (images inférieures) prises au même instant pendant la phase rétrograde ($t = 0,4015 T_{lib}$). Toutes les simulations ont été effectuées pour $\alpha = 2$, $E = 5 \times 10^{-5}$ et $\omega = 0,05$. Les figures (a) et (b) montrent un cas stable où aucune instabilité n'est observée. Les figures (c) et (d) sont centrifuges instables, des rouleaux de Taylor-Görtler sont visibles près de la paroi latérale. Les figures (e) et (f) illustrent un écoulement plus complexe visible pour une amplitude de libration ϵ plus importante.

augmentant l'amplitude de libration longitudinale ε au-delà d'une valeur critique, ε_c , un écoulement différent apparaît près de la paroi extérieure (figures 5.2(c) and 5.2(d)). Cet écoulement est induit par une déstabilisation centrifuge de l'écoulement oscillant dans la couche visqueuse générée par le forçage harmonique. Nous notons l'apparition de vortex contra-rotatifs, appelés rouleaux de Taylor-Görtler (voir par exemple Saric, 1994). Cette structure ressemble à l'écoulement observé expérimentalement par Noir *et al.* (2010) au seuil de l'instabilité. Notons que ce type d'écoulement a également été analysé en géométrie cylindre par Ern & Wesfreid (1999). De telles structures ont également été observées dans des expériences de "spin-down" en géométrie cylindrique (Weidman, 1976; Neitzel & Davis, 1981) ainsi que dans une étude plus récente de l'écoulement dans cylindre oscillant (Blennerhassett & Bassom, 2007). Dans ce chapitre, nous allons étudier la transition entre l'écoulement stable et l'écoulement instable centrifuge et décrire le seuil de l'instabilité en fonction des trois paramètres du problème : E , ε et ω . Nous remarquons que pour des valeurs plus grandes de l'amplitude ε , l'écoulement devient plus complexe (figures 5.2(e) et 5.2(f)). Nous n'avons pas essayé de caractériser la transition entre le régime centrifuge instable et le régime "turbulent" car un comportement non-axisymétrique inaccessible dans le cadre de nos simulations axisymétriques est attendu. Nous montrerons tout de même dans le chapitre suivant, que cet écoulement "pseudo-turbulent" peut générer spontanément des ondes inertielles dans le volume.

Nous pouvons représenter le signal temporel du champ des vitesses axiales près de la paroi extérieure dans un régime stable et dans un régime instable (figures 5.3(a) et (b)). Sur la figure 5.3(a), la vitesse axiale est mesurée au point ($r = 0,99$; $z = 0$), c'est-à-dire près de la paroi extérieure et sur le plan de symétrie du cylindre. Sur la figure 5.3(b), la vitesse axiale est cette fois-ci mesurée au point ($r = 0,99$; $z = 0,1$). En deçà du seuil d'instabilité, pour $\varepsilon = 0,28$, aucun signal n'est observé au point ($r = 0,99$; $z = 0$) alors qu'une oscillation du signal à la fréquence de libration est observée en ($r = 0,99$; $z = 0,1$). Ces oscillations, visibles pour un point qui n'est pas localisé dans le plan de symétrie du cylindre, proviennent du pompage d'Ekman induit par les parois supérieure et inférieure durant les phases rétrograde et prograde. Lorsque l'amplitude de libration longitudinale, ε , est augmentée au-delà du seuil d'instabilité, le signal correspondant à la vitesse axiale est modifié. Soit il devient non-nul en ($r = 0,99$; $z = 0$) comme représenté sur la figure 5.3(a), soit son amplitude devient plus grande en ($r = 0,99$; $z = 0,1$) comme l'illustre la figure 5.3(b). Ce signal est associé à la croissance d'une instabilité centrifuge à la fin de la phase rétrograde. Un pic bien défini est observé au début de la phase prograde pour les deux positions de la sonde. Ce changement de comportement de la vitesse axiale, en présence de l'instabilité centrifuge, va nous permettre de déterminer numériquement le seuil d'instabilité, ε_c pour une fréquence de libration, ω , et un nombre d'Ekman, E , donnés.

Dans la suite, nous développons une expression théorique pour le seuil d'apparition des rouleaux de Taylor-Görtler à l'aide d'une étude locale de stabilité. Cette expression prend en compte l'influence de la fréquence de libration et réconcilie les lois d'échelles obtenues en géométries cylindrique et sphérique.

5.3 Détermination théorique du seuil d'apparition de l'instabilité

Dans cette section, nous considérons de petites amplitudes de libration, $\varepsilon \ll 1$, de telle sorte que le champ de vitesses dans le cylindre soumis au forçage de libration longitudinale puisse être décrit par sa réponse linéaire. A l'ordre ε , l'équation de Navier-Stokes s'écrit dans le référentiel

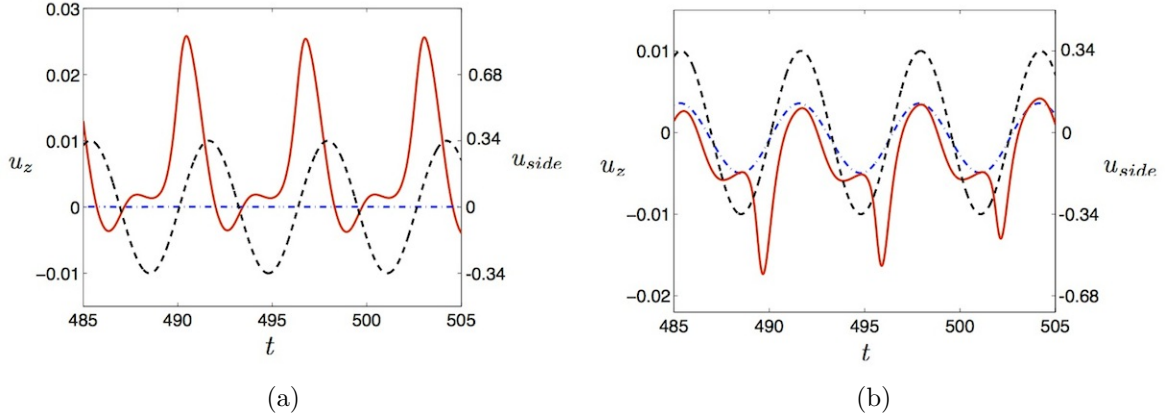


FIGURE 5.3 – Vitesse axiale, u_z , pour $\varepsilon = 0,28$ (courbe en tirets-pointillés bleue, échelle de gauche), $\varepsilon = 0,34$ (courbe continue rouge, échelle de gauche) et vitesse azimutale de la paroi dans le référentiel en rotation, u_{side} (courbe en tirets noire, échelle de droite) dans un cylindre de rapport d'aspect $\alpha = 2$ et pour $E = 4 \times 10^{-5}$ et $\omega = 1$ (a) au point $(r = 0,99; z = 0)$ et (b) au point $(r = 0,99; z = 0,1)$.

en rotation à la vitesse angulaire moyenne de la sphère :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + 2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_1 = -\nabla p_1 + E \nabla^2 \mathbf{u}_1, \quad (5.3)$$

où l'indice 1 précise que l'on considère les termes de premier ordre en ε . En effectuant une analyse classique de couche limite (voir par exemple Wang, 1970), on obtient la correction azimutale du champ des vitesses au voisinage de la paroi extérieure :

$$u_{1,\theta} = \varepsilon \exp\left(-\frac{1-r}{\sqrt{E}} \sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) \cos\left(\omega t - \frac{1-r}{\sqrt{E}} \sqrt{\frac{\omega}{2}}\right). \quad (5.4)$$

Cet écoulement de couche limite, d'épaisseur $O(\sqrt{E/\omega})$, correspond à une couche de Stokes oscillante. Du moment que la période de libration longitudinale est petite comparée au temps de mise en rotation du fluide (c'est-à-dire pour $\omega \gg \sqrt{E}$), cet écoulement de couche limite ne génère aucun écoulement dans le volume (Wang, 1970; Busse, 2010b). Par contre, les couches d'Ekman situées sur les parois supérieure et inférieure du cylindre induisent une correction d'ordre $E^{1/2}$ dans le volume (voir l'analyse de Wang, 1970). Ce pompage axial demeure faible dans la limite $\sqrt{E} \ll \omega$ et $\sqrt{E} \ll 1$. On négligera ce pompage dans notre analyse.

Les expériences menées par Noir *et al.* (2010) tendent à montrer que l'écoulement donné par la relation (5.4) peut devenir centrifuge instable pour des perturbations axisymétriques. Il est alors naturel d'appliquer le critère de Rayleigh, qui est une condition nécessaire (Rayleigh, 1917) et suffisante (Synge, 1933) d'instabilité d'une perturbation non-visqueuse axisymétrique dans un écoulement stationnaire. Ce critère s'écrit :

$$\Phi = \frac{d}{dr} \left(r^2 u_\theta^{(tot)^2} \right) < 0, \quad (5.5)$$

où $u_\theta^{(tot)}$ est la vitesse azimutale totale. Ce critère peut être satisfait seulement dans la couche limite où le discriminant de Rayleigh Φ se réduit à l'ordre dominant à

$$\Phi \sim 2 \left(2 + \frac{d u_{1,\theta}}{dr} \right). \quad (5.6)$$

Nous allons utiliser l'expression (5.4) pour la vitesse azimutale $u_{1,\theta}$ dans l'expression du critère de Rayleigh (5.6). Notons auparavant que nous effectuons implicitement une analyse quasi-statique. En d'autres termes, nous supposons que les variations temporelles de l'écoulement sont lentes comparées à l'échelle de temps associée à la croissance de l'instabilité centrifuge. Ce critère d'instabilité est donc local dans le temps. En considérant seulement le moment où l'écoulement de base est le plus instable, nous espérons obtenir une borne inférieure pour le domaine d'instabilité. Ici, le profil le plus instable est atteint pour $t_m = 3\pi/(4\omega)$ et la valeur minimale du discriminant de Rayleigh Φ est obtenue en $r_m = 1$ et a pour expression :

$$\Phi_{min} = 2 \left(2 - \varepsilon \sqrt{\frac{\omega}{E}} \right). \quad (5.7)$$

Quand $\Phi_{min} > 0$, le critère de Rayleigh n'est pas satisfait et l'instabilité centrifuge ne peut croître. En fonction de l'amplitude de libration longitudinale, ε , cela signifie que si

$$\varepsilon < \varepsilon_c^{(NV)} = 2 \sqrt{\frac{E}{\omega}}, \quad (5.8)$$

alors l'écoulement est stable. Ce critère est non visqueux et ne prend pas en compte l'amortissement induit par la viscosité qui va affecter les petites échelles des modes instables. Pour obtenir un critère plus général, il est nécessaire de résoudre l'équation de stabilité visqueuse pour l'écoulement donné par l'expression (5.4). En utilisant le profil de vitesse le plus instable qui est obtenu en t_m , la limite inférieure du seuil de l'instabilité centrifuge peut être obtenue en analysant les propriétés de stabilité de ce profil. En supposant à la fois $\varepsilon \ll 1$ et $\sqrt{E/\omega} \ll 1$ avec $\varepsilon \sqrt{\omega/E} = O(1)$, le problème visqueux de stabilité pour les perturbations axisymétriques $(u_r, u_\theta, u_z, p) \exp(i k \tilde{z} + \sigma t)$ se réduit à résoudre le système :

$$\sigma u_r - 2 u_\theta = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\omega}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} - k^2 \right) u_r, \quad (5.9)$$

$$\sigma u_\theta + \left(2 - \tilde{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_{1,\theta}(\tilde{r})}{\partial \tilde{r}} \right) u_r = \frac{\omega}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} - k^2 \right) u_\theta, \quad (5.10)$$

$$\sigma u_z = -i k \tilde{p} + \frac{\omega}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} - k^2 \right) u_z, \quad (5.11)$$

$$-\frac{\partial u_r}{\partial \tilde{r}} + i k u_z = 0, \quad (5.12)$$

avec les conditions aux limites

$$u_r = u_\theta = u_z = 0 \quad \text{pour} \quad \tilde{r} = 0, +\infty, \quad (5.13)$$

et où on a posé

$$\tilde{r} = \frac{1-r}{\sqrt{E}} \sqrt{\frac{\omega}{2}}, \quad (5.14)$$

$$\tilde{z} = \frac{z}{\sqrt{E}} \sqrt{\frac{\omega}{2}}, \quad (5.15)$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{E}} \sqrt{\frac{\omega}{2}}, \quad (5.16)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{E}} \sqrt{\frac{\omega}{2}}, \quad (5.17)$$

$$\tilde{u}_\theta^1(\tilde{r}) = e^{-\tilde{r}} \sqrt{2} \cos(\tilde{r}). \quad (5.18)$$

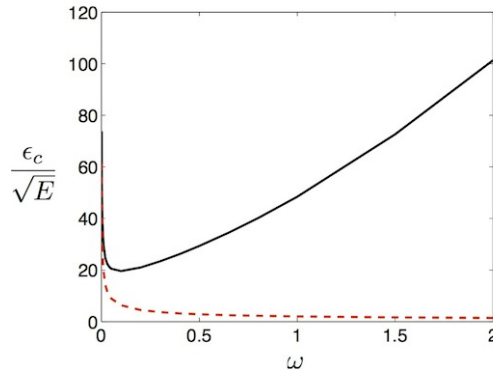


FIGURE 5.4 – Amplitude critique ε_c/\sqrt{E} d'apparition de l'instabilité centrifuge obtenue théoriquement. La courbe continue noire est le critère visqueux $\varepsilon_c^{(V)}(\omega)/\sqrt{E}$ (relation (5.20)) et la courbe rouge en pointillés est le critère non-visqueux $\varepsilon_c^{(NV)}(\omega)/\sqrt{E} = 2/\sqrt{\omega}$ (relation (5.8)).

Nous avons résolu ce problème aux valeurs propres pour σ à l'aide d'une approche pseudo-spectrale. La discrétisation radiale est basée sur des polynômes de Chebyshev. On remarque que le nombre d'Ekman, E , a disparu des équations. Ceci signifie que les valeurs propres σ obtenues en résolvant le système (5.9)-(5.12) avec les conditions aux limites (5.13) sont uniquement fonctions des paramètres k , $\tilde{\varepsilon}$ et ω . Par conséquent, le taux de croissance maximum, σ_{max} , par rapport à toutes les valeurs possibles de k est une fonction de $\tilde{\varepsilon}$ et ω seulement :

$$\sigma_{max} = \max_k \sigma = \sigma_{max}(\tilde{\varepsilon}, \omega) \quad (5.19)$$

La courbe de stabilité, définie par $\sigma_{max} = 0$, est alors donnée par la courbe $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_c(\omega)$ qui est une fonction de ω seulement. En revenant aux variables initiales, le critère visqueux de stabilité a pour expression :

$$\varepsilon < \varepsilon_c^{(V)} = \tilde{\varepsilon}_c(\omega) \sqrt{\frac{2E}{\omega}}. \quad (5.20)$$

Nous avons représenté l'amplitude critique d'apparition de l'instabilité centrifuge, $\varepsilon_c^{(V)}(\omega)/\sqrt{E}$, en fonction de la fréquence de libration ω sur la figure 5.4. Cette courbe est comparée à la prédiction non visqueuse $\varepsilon_c^{(NV)}(\omega)/\sqrt{E} = 2/\sqrt{\omega}$. Notons que pour $\omega \rightarrow 0$, $\varepsilon_c^{(V)} \sim \varepsilon_c^{(NV)}$. Ceci est en accord avec le système d'équation (5.9)-(5.12) dans lequel les termes visqueux deviennent nuls pour $\omega \rightarrow 0$. Cependant, les deux courbes, $\varepsilon_c^{(NV)}$ et $\varepsilon_c^{(V)}$, divergent quand $\omega \rightarrow 0$. Ce comportement singulier est associé à la divergence de l'épaisseur de la couche limite quand $\omega \rightarrow 0$. En pratique, l'épaisseur de la couche limite ne diverge pas mais se transforme en une couche de Stewartson d'épaisseur $E^{1/4}$ quand ω devient de l'ordre de $E^{1/2}$ ou plus petit. Cependant, avec l'hypothèse $\omega \gg \sqrt{E}$ que nous avons émise, nous n'atteignons jamais ce régime. De plus, nous voyons que le fait de négliger la viscosité conduit à un critère non visqueux qui décroît lorsque la fréquence de libration ω augmente, en contradiction avec les expériences (voir ci-dessous). Au contraire, le critère visqueux augmente avec ω , ce qui est en accord qualitatif avec les études numériques menées comme nous allons le voir dans la section suivante.

Le critère de stabilité visqueux a été obtenu en considérant le profil le plus instable dans un état "gelé". Cette analyse quasi-stationnaire doit nous donner, a priori, une limite inférieure du seuil d'instabilité. En pratique, puisque l'écoulement de base est oscillant, une analyse de Floquet

devrait être effectuée pour obtenir une estimation plus précise de l’amplitude critique. Néanmoins, nous discutons ci-dessous pourquoi nous ne pensons pas qu’un tel développement vaut la peine d’être effectué ici. Finalement, on peut remarquer que le critère de stabilité visqueux présenté ci-dessus a uniquement nécessité l’hypothèse d’une couche limite localement verticale. Ce critère doit donc s’appliquer au voisinage des parois verticales de n’importe quel conteneur axisymétrique. En particulier, nous pensons que le même critère s’applique pour l’écoulement induit par libration longitudinale dans une sphère proche de l’équateur. Dans les sections suivantes, ce critère de stabilité visqueux est comparé aux résultats des simulations numériques et aux observations expérimentales de [Noir et al. \(2010\)](#).

5.4 Comparaison numérique et expérimentale

5.4.1 Méthodologie

Les simulations numériques, effectuées avec le modèle présenté au chapitre 2, nous permettent d’étudier la gamme de paramètres considérée dans les expériences précédentes disponible dans la littérature ([Noir et al., 2010](#)) mais également de varier davantage l’amplitude du nombre d’Ekman. De plus, nous pouvons explorer plus précisément la transition entre les régimes stable/instable à l’aide de la mesure de la vitesse axiale. Finalement, nous considérons également l’influence de la fréquence de libration, ce qui n’a pas été étudié précédemment. La méthode utilisée pour déterminer le seuil d’instabilité est identique à celle utilisée par [Calkins et al. \(2010\)](#) : pour un nombre d’Ekman, E , et une fréquence de libration, ω , fixés, nous considérons une amplitude arbitraire de libration longitudinale, ε . Nous observons alors si l’écoulement est stable (respectivement instable), puis nous augmentons (respectivement diminuons) l’amplitude de libration jusqu’à ce que nous atteignons un régime instable (respectivement stable). La détermination de l’instabilité est faite par visualisation directe des résultats numériques (voir figure 5.2), et également en traçant la vitesse verticale au voisinage de la paroi extérieure à différentes positions. En effet, nous avons vu en figure 5.3 que d’importantes variations de l’amplitude de la vitesse axiale sont visibles à la transition entre le régime stable et centrifuge instable. Si l’écoulement est stable, la composante axiale du champ des vitesses reste petite, de plus, son amplitude est périodique avec une période égale à la période de libration (voir figure 5.3(b)). Dès lors que nous atteignons un régime instable, la vitesse verticale augmente soudainement (figure 5.5) et devient moins régulière. L’amplitude critique de libration ε_c est définie comme la moyenne géométrique de la plus grande valeur de ε où l’écoulement est stable et de la plus petite valeur de ε où l’écoulement est instable. Notons que nous n’avons pas observé de phénomène d’hystérésis. Par conséquent, nous nous attendons à ce que cette instabilité soit supercritique comme dans un écoulement classique de Taylor-Couette.

Nous avons représenté sur la figure 5.5 la valeur maximum de l’amplitude pic à pic, i.e. la valeur maximale moins la valeur minimale, de la vitesse verticale en fonction de l’amplitude de libration longitudinale ε pour un nombre d’Ekman, $E = 6 \times 10^{-5}$ et une fréquence de libration, $\omega = 0,8$ fixés. La présence du pompage d’Ekman sur les parois supérieure et inférieure du cylindre induit une vitesse axiale non nulle, même en-dessous du seuil d’instabilité, et qui dépend de la position où on mesure l’amplitude pic à pic. La vitesse axiale est faible proche du plan de symétrie, $z = 0$, et augmente lorsque l’on se rapproche des parois supérieure et inférieure. Une transition est visible au voisinage de $\varepsilon_c \simeq 0,355$. Cette transition est très claire dans les mesures effectuées en $z = 0,1$ car la vitesse axiale augmente d’un facteur 3. Les visualisations que nous avons effectuées montrent également que les rouleaux générés par l’instabilité ne se développent

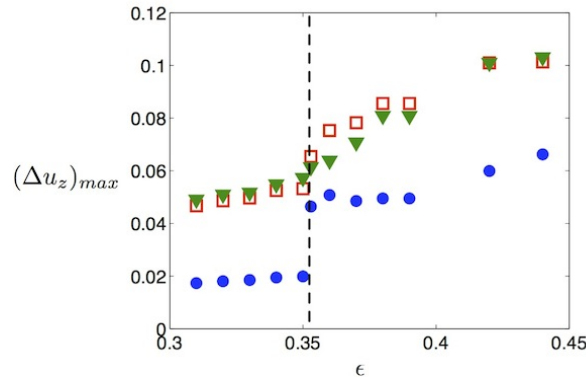


FIGURE 5.5 – Amplitude pic à pic de la vitesse axiale, $(\Delta u_z)_{max}$, dans un cylindre de rapport d’aspect $\alpha = 2$ pour un nombre d’Ekman $E = 6 \times 10^{-5}$, une fréquence de libration longitudinale $\omega = 0,8$ et différentes valeurs de l’amplitude de libration ε . Les mesures sont effectuées à différentes positions : les cercles bleus en $(r = 0,95; z = 0,1)$, les carrés rouges en $(r = 0,95; z = 0,4)$ et les triangles verts en $(r = 0,95; z = 0,9)$. Nous remarquons une transition entre les régimes stable et instable en $\varepsilon_c \simeq 0,355$.

pas toujours au même endroit dans le cylindre. Pour de faibles fréquences de libration, typiquement $\omega < 1$, les rouleaux de Taylor-Görtler se développent dans un premier temps au voisinage de l’équateur, en $z \simeq 0$. Si on augmente la fréquence de libration, on constate que le premier endroit où prennent naissance ces rouleaux est à mi-distance entre le coin supérieur et le plan de symétrie. Ce comportement est probablement relié lui-aussi au pompage d’Ekman induit par les parois supérieure et inférieure.

5.4.2 Influence du nombre d’Ekman

La figure 5.6 présente les résultats de notre étude numérique sur l’influence du nombre d’Ekman. Une variation proportionnelle à $E^{1/2}$ est clairement observée et est bien décrite par le critère de stabilité visqueux (5.20). Celui-ci prédit que le seuil d’instabilité est donné par $\varepsilon_c = 47,8 E^{1/2}$ pour une fréquence de libration longitudinale $\omega = 1$, aucun paramètre d’ajustement n’étant utilisé ici. Si nous considérons l’échelle spatiale $\delta = \sqrt{E} \sqrt{2\Omega_0/\omega} R$ et l’échelle de vitesse $u = \sqrt{2}\varepsilon \Omega_0 R/2$, comme décrit par la théorie de couche limite (voir l’expression (5.4)), nous obtenons un nombre de Reynolds de couche limite critique égal à $Re_{BL,cr} = 47,8$. Cette valeur est étonnamment proche de la valeur $Re_{BL,cr} = 46$ obtenue dans une coquille sphérique par les études numériques de Calkins *et al.* (2010) pour la même valeur de ω .

Nous pouvons également comparer l’étude analytique aux observations expérimentales de Noir *et al.* (2010) en géométrie cylindrique. Ces expériences ont été effectuées avec le même rapport d’aspect que les résultats présentés sur la figure 5.6. Nous avons également tracé la loi d’échelle proposée par Noir *et al.* (2010). Dans ce cas-là, l’accord quantitatif avec notre étude analytique n’est pas aussi bon que pour les simulations numériques. En particulier, nous ne comprenons pas pourquoi le seuil expérimental est bien en deçà de notre estimation que nous pensons être une borne inférieure du seuil de stabilité. Précisons que la même observation a été faite en géométrie sphérique entre les expériences (Noir *et al.*, 2009) et l’étude numérique (Calkins *et al.*, 2010). Une suggestion pour expliquer cette différence entre les mesures expérimentales et numériques a été proposée par Calkins *et al.* (2010) : un bruit expérimental systématique est présent dans les expériences et induit une instabilité pour une amplitude de libration plus faible. Cela pourrait également être dû à la visualisation avec les particules de Kalliroscope qui ne

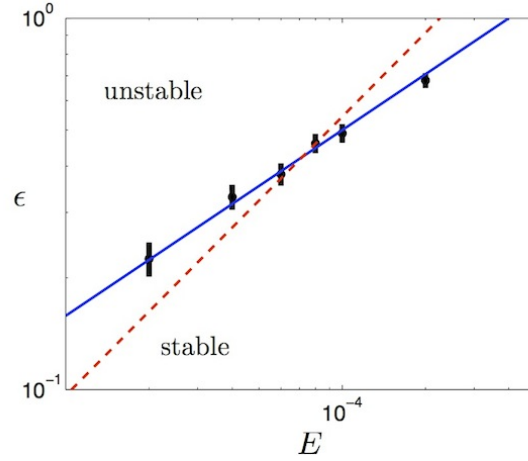


FIGURE 5.6 – Diagramme de stabilité d'apparition des rouleaux de Taylor-Görtler pour une fréquence de libration longitudinale $\omega = 1$ dans un cylindre de rapport d'aspect $\alpha = 2$. Les barres noires représentent les résultats numériques avec les incertitudes dans l'estimation du seuil. La courbe continue bleue est le critère de stabilité visqueux (5.20) sans paramètre d'ajustement : $47,8 E^{1/2}$ et la courbe rouge en pointillées est la meilleure approximation obtenue en utilisant la loi d'échelle proposée par Noir *et al.* (2010) : $543,2 E^{3/4}$.

mesurent pas directement le champ de vitesses et peuvent garder la mémoire de l'écoulement. On remarque néanmoins qu'une variation en $E^{1/2}$ du seuil d'instabilité permet de décrire les résultats expérimentaux avec un bon accord. Par conséquent, les mesures expérimentales suggèrent une variation en $E^{1/2}$ ou $E^{3/4}$ du seuil de stabilité. Néanmoins, cette dernière loi d'échelle en $E^{3/4}$ ne tient plus pour les résultats numériques (voir figure 5.6).

Si on considère une couche visqueuse d'épaisseur proportionnelle à $E^{1/2}$ la loi d'échelle proposée par Noir *et al.* (2010) permet de retrouver une variation de l'amplitude critique proportionnelle à $E^{1/2}$ comme prédit par notre théorie. Le fait de ne pas considérer la couche de Stewartson s'explique par la non-stationnarité du problème. Comme l'a souligné Barcilon (1968), pour un temps inférieur au temps de mise en rotation du fluide, ce qui est le cas ici, les couches de Stewartson transitoires générées par les parois supérieure et inférieure n'ont pas le temps de se développer et de modifier la solution de Stokes dans la couche visqueuse donnée par la relation (5.4), ce qui permet d'expliquer la loi d'échelle observée dans les expériences.

5.4.3 Influence de la fréquence de libration ω

L'influence de la fréquence de libration longitudinale, ω , sur le seuil d'apparition de l'instabilité n'a pas été considérée dans les études antérieures. Ici, nous considérons 8 valeurs arbitraires différentes de ω choisies dans l'intervalle $\omega \in [0; 2]$: 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,65, 0,8, 1 et 1,5. Les seuils déterminés, pour un nombre d'Ekman $E = 6 \times 10^{-5}$, sont reportés en figure 5.8. La valeur critique ε_c obtenue numériquement devient plus grande quand on augmente la fréquence de libration ω . Sur cette figure, nous avons également reporté le critère de stabilité visqueux (5.20). Bien que la prédiction théorique estime correctement la tendance qualitative de l'augmentation du seuil d'instabilité avec ω , cette loi échoue à donner une valeur quantitative correcte pour les petites et grandes valeurs de ω .

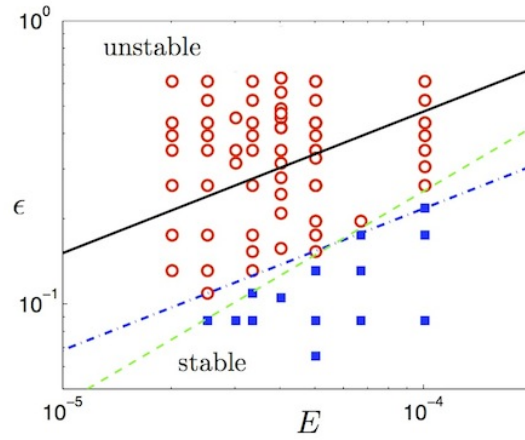


FIGURE 5.7 – Résultats expérimentaux obtenus par visualisation directe représentés en fonction de l’amplitude de libration ε en fonction de E pour une valeur fixée de $\omega = 1$ (Noir *et al.*, 2010). Les carrés bleus sont les points centrifuges stables et les cercles rouges sont centrifuges instables. La courbe continue noire est le critère de stabilité visqueux (5.20), et la courbe bleue en pointillés est la meilleure approximation avec une loi d’échelle en $E^{1/2}$: $22 E^{1/2}$, alors que la courbe verte en pointillés est la meilleure approximation avec la loi d’échelle proposée par Noir *et al.* (2010) : $250 E^{3/4}$.

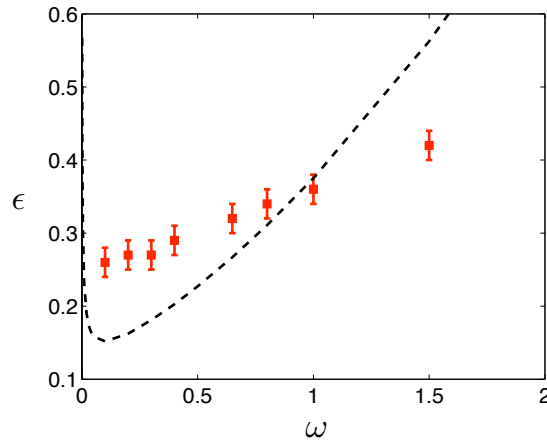


FIGURE 5.8 – Diagramme de stabilité d’apparition des rouleaux de Taylor-Görtler en fonction de la fréquence de libration longitudinale ω . Les carrés indiquent le seuil obtenu numériquement pour $E = 6 \times 10^{-5}$ dans un cylindre de rapport d’aspect $\alpha = 2$. La courbe en pointillés est le critère de stabilité visqueux (5.20) sans aucun paramètre d’ajustement.

Pour des petites valeurs de ω , la loi théorique obtenue prédit un seuil d'instabilité deux fois plus petit que la valeur numérique observée. Nous ne pouvons attribuer cette différence à des variations temporelles de l'écoulement de base qui n'ont pas été prises en compte dans l'étude théorique. En effet, pour de faibles valeurs de ω , l'approximation quasi-stationnaire s'applique et nous nous attendons à ce qu'une analyse de Floquet conduite à un seuil d'instabilité similaire. Nous supposons plutôt que cette différence est associée à une mauvaise description de l'écoulement dans la couche limite. Pour des petites fréquences (c'est-à-dire si la condition $\omega \gg \sqrt{E}$ n'est plus totalement vérifiée), des couches de Stewartson transitoires générées par les parois supérieure et inférieure peuvent avoir le temps de se développer (voir [Barcilon, 1968](#)) et de modifier la solution de Stokes dans la couche visqueuse (5.4). Pour de grandes valeurs de la fréquence de libration ω , notre prédiction théorique est inférieure au seuil d'instabilité déterminé numériquement. Encore une fois, une analyse de Floquet plus précise n'aurait pas expliqué cette différence. En effet, une analyse de stabilité globale obtenue par une analyse de Floquet prédirait un domaine d'instabilité plus réduit et donc une valeur encore plus grande pour le seuil. Ici, nous pensons que cette différence provient des effets non-linéaires. Notre approche théorique suppose un écoulement linéaire dans la couche limite qui ne doit plus être valable quand ε n'est pas suffisamment petit. De plus, l'hypothèse de quasi-stationnarité de l'écoulement est plus difficile à satisfaire. Une étude numérique systématique à plus petit nombre d'Ekman est requise pour comparer les résultats théoriques de la dépendance du seuil d'instabilité avec la fréquence de libration.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré qu'une instabilité centrifuge peut se développer au voisinage de la paroi extérieure d'un conteneur soumis à un forçage de libration longitudinale si l'amplitude de forçage est suffisamment grande ou le nombre d'Ekman de l'écoulement suffisamment petit. Une étude analytique nous a permis de retrouver les résultats expérimentaux de [Noir et al. \(2009, 2010\)](#) en géométrie sphérique et en géométrie cylindre ainsi que les résultats numériques, dans une coquille sphérique, de [Calkins et al. \(2010\)](#). L'étude théorique développée ici a pu être confrontée aux résultats de simulations numériques dans un cylindre soumis à un forçage de libration longitudinale. De futures études numériques à plus faible nombre d'Ekman sont requises pour étudier précisément l'influence de la fréquence de libration sur le seuil de l'instabilité. Notons qu'une telle instabilité est susceptible de se produire dans différents corps du système solaire. Ce point a été discuté en détails par [Noir et al. \(2009\)](#) et nous y reviendrons dans la conclusion de ce manuscrit.

Chapitre

6

Génération spontanée d'ondes inertielles

The most exciting phrase to hear in science, the one that heralds new discoveries, is not 'Eureka!', but 'That's funny ...'

Isaac Asimov

Sommaire du chapitre

6.1 Introduction	118
6.2 Formulation mathématique	118
6.3 Étude numérique en géométrie sphérique	119
6.3.1 De l'écoulement stable au régime turbulent	119
6.3.2 Caractérisation des ondes inertielles générées spontanément	120
6.3.3 Influence de l'amplitude de forçage	125
6.3.4 Observations pour différentes fréquences de libration	128
6.4 Comparaison avec un modèle analytique idéalisé	128
6.4.1 Onde émise dans le volume	128
6.4.2 Perspectives analytiques	132
6.5 Génération spontanée d'ondes inertielles dans un cylindre	133
6.6 Conclusion	136

Dans le chapitre précédent, nous avons déterminé le seuil d'apparition d'une instabilité centrifuge induite par un forçage de libration longitudinale au voisinage de la paroi extérieure d'un conteneur axisymétrique. En conservant le même système, nous étudions, dans ce chapitre, des configurations bien au-delà du seuil d'instabilité où une dynamique riche d'écoulements est observée. À l'aide du modèle axisymétrique utilisé dans les chapitres précédents, nous observons que si l'on augmente l'amplitude de libration ε un écoulement turbulent est généré dans la couche limite. Cette observation est en accord avec les expériences récentes de [Noir et al. \(2009, 2010\)](#). Nous mettons en évidence que ce régime d'écoulement turbulent induit des mouvements de fluides dans le volume sous la forme d'ondes inertielles générées spontanément par la turbulence, et ce même pour des fréquences de libration $\omega > 2$, i.e. dans un régime où aucune onde inertielle n'est directement forcée. Nous étudions les principales caractéristiques de ces ondes inertielles qui présentent une analogie avec les études antérieures de génération d'ondes internes dans un fluide stratifié. En particulier, les spectres temporels et spatiaux mettent en évidence que l'énergie rayonnée via ce mécanisme converge vers une gamme de fréquences et de longueurs d'ondes bien définie. Ce phénomène linéaire est générique à tout écoulement en rotation en pré-

sence de turbulence et est donc pertinent pour les applications géophysiques et les phénomènes de transports.

6.1 Introduction

Nous rappelons que les écoulements en rotation sont le support d'ondes inertielles, associées à la force de Coriolis (Kelvin, 1880). Ces ondes peuvent être excitées directement par différents forçages harmoniques uniquement pour des fréquences comprises entre plus ou moins deux fois la fréquence de rotation (Greenspan, 1968). Par exemple, Aldridge & Toomre (1969) ont montré la possibilité de faire résonner des ondes inertielles directement excitées par un forçage de libration longitudinale dans la gamme $\omega \in [-2; 2]$. À l'inverse, pour des fréquences de forçage $|\omega| > 2$, les ondes inertielles ne peuvent pas être excitées par un forçage direct et n'ont jamais été observées, excepté très récemment dans un cylindre oscillant autour de son axe en présence d'instabilités près de la paroi extérieure (Lopez & Marques, 2011; Sauret *et al.*, 2012a). Le mécanisme responsable de ce phénomène est toujours soumis à controverse et constitue le sujet de ce chapitre où nous considérons le cas d'une sphère soumise à un forçage de libration longitudinale. En effet, au delà du mécanisme générique responsable de ce phénomène, les applications géo- et astrophysiques qui en résultent peuvent être intéressantes pour le transport de quantité de mouvement ou d'énergie.

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, le forçage de libration longitudinale conduit à une dynamique très riche. En particulier, pour des amplitudes de libration suffisamment importantes, une instabilité centrifuge est générée au voisinage de l'équateur d'une sphère. Cette instabilité, générique à tout conteneur axisymétrique (Noir *et al.*, 2010; Sauret *et al.*, 2012a), peut à son tour générer une région dans la couche visqueuse où l'écoulement est turbulent (Noir *et al.*, 2009; Calkins *et al.*, 2010). Nous avons également vu aux chapitres 3 et 4 qu'indépendamment de cette instabilité, localisée près de la paroi extérieure, la forçage de libration induit un écoulement zonal stationnaire via des interactions non-linéaires dans les couches visqueuses, même en l'absence d'ondes inertielles (Busse, 2010a; Sauret *et al.*, 2010; Sauret & Le Dizès, 2013). Notons également que pour des fréquences de libration $\omega \in [-2; 2]$, la dynamique du fluide dans le volume devient plus compliquée. En effet, la contribution des ondes inertielles sur l'écoulement n'est pas négligeable (Calkins *et al.*, 2010; Sauret *et al.*, 2012a; Boisson *et al.*, 2012). Nous reviendrons dans le chapitre 8 sur les éruptions de couches limites, localisées au niveau des latitudes critiques, qui transmettent de l'énergie au fluide dans le volume (Noir *et al.*, 2001; Kida, 2011).

Dans ce chapitre, nous caractérisons pour la première fois les ondes inertielles émises dans le volume d'un conteneur en rotation par l'écoulement turbulent généré dans la couche d'Ekman induit par le forçage de libration longitudinale, sans besoin d'un forçage extérieur, comme par exemple avec une grille (Lamriben *et al.*, 2011). Nous montrons que les ondes inertielles sont présentes, même pour des fréquences de libration $|\omega| > 2$, où habituellement aucune onde iner-tielle ne se propage. De plus, l'angle de propagation est caractérisé et une explication de l'angle observé est proposée en se basant sur l'analogie avec la génération d'ondes internes à partir de la turbulence (Townsend, 1965, 1966; Dohan & Sutherland, 2003, 2005; Taylor & Sarkar, 2007).

6.2 Formulation mathématique

Comme dans les chapitres précédents, nous considérons l'écoulement dans une sphère de rayon R , contenant un fluide, incompressible de viscosité cinématique ν et de densité ρ , en

rotation autour de l'axe z à la vitesse angulaire moyenne Ω_0 . En utilisant respectivement Ω_0^{-1} et R comme échelles de temps et de longueur, la vitesse angulaire instantanée s'écrit

$$\boldsymbol{\Omega} = [1 + \varepsilon \cos(\omega t)] \mathbf{e}_z \quad (6.1)$$

où ε et ω sont respectivement l'amplitude et la fréquence de libration longitudinale adimensionnée. Les équations de Navier-Stokes et de conservation de la masse, s'écrivent, dans le référentiel en rotation à la vitesse angulaire Ω_0 et sous forme adimensionnée

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla p + E \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (6.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6.3)$$

où $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$ et p sont respectivement le champ des vitesses dans le référentiel en rotation et la pression. Trois paramètres sans dimension gouvernent notre problème : le nombre d'Ekman $E = \nu/(\Omega_0 R^2)$, ω and ε .

Un problème similaire de génération d'ondes internes par un écoulement turbulent dans un milieu stratifié a montré, par comparaison avec des expériences de laboratoire, que des simulations numériques 2D permettent de capturer le mécanisme physique et les principales caractéristiques de la génération d'ondes internes (Dohan & Sutherland, 2005). Par conséquent, afin de pour pouvoir atteindre des nombres d'Ekman suffisamment petits, nous basons notre étude sur le modèle axisymétrique présenté au chapitre 2.

6.3 Étude numérique en géométrie sphérique

6.3.1 De l'écoulement stable au régime turbulent

Dans toute la suite, et comme dans les chapitres précédents, nous considérons des écoulements à faible nombre d'Ekman, $\sqrt{E} \ll 1$, et des fréquences de libration vérifiant $\omega \gg \sqrt{E}$, pour ne pas avoir de mise en rotation du fluide dans le volume à chaque cycle de libration (Greenspan, 1968; Busse, 2010a). Cette situation est, la plupart du temps, satisfaite dans les écoulements astrophysiques où le nombre d'Ekman est typiquement plus petit que 10^{-12} et où la principale composante de libration longitudinale est de fréquence d'ordre 1 (voir par exemple Rambaux *et al.*, 2011). En fonction de l'amplitude de libration ε , trois régimes d'écoulements différents sont observés près de la paroi extérieure (Noir *et al.*, 2009; Calkins *et al.*, 2010). Pour une amplitude de libration ε plus petite qu'une valeur critique, notée ε_{TG} , l'écoulement demeure stable et seul le pompage d'Ekman est visible près de la paroi extérieure, l'écoulement reste stable dans toute la sphère. Pour $\varepsilon > \varepsilon_{TG}$, mais plus petit qu'une valeur critique, que nous appelons ε_{turb} , des rouleaux de Taylor-Görtler se développent au voisinage de la paroi extérieure, comme nous l'avons vu au chapitre 5. Puis, pour une amplitude de libration ε plus grande qu'une amplitude critique ε_{turb} , un écoulement turbulent est généré dans la couche visqueuse. Ces trois situations sont résumées sur la figure 6.1. La fréquence de libration utilisée dans ces simulations, $\omega = 3$, est telle qu'aucune onde inertielle n'est excitée par forçage direct. Cependant, les ondes inertielles que l'on voit sont excitées dans le volume par le régime turbulent, qui semble clairement émettre des ondes à partir de la région turbulente localisée au voisinage de l'équateur.

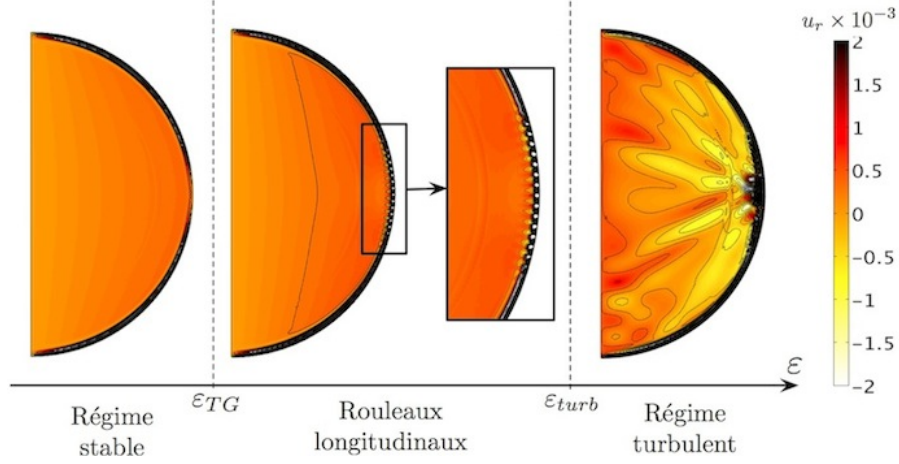


FIGURE 6.1 – Champ de vitesse radiale u_r dans une sphère en libration longitudinale ($\omega = 3$, $E = 5 \times 10^{-5}$) pour différentes valeurs de l'amplitude de forçage ε (de gauche à droite : $\varepsilon = 0,3, 0,55, 0,85$). ε_{TG} et ε_{turb} sont respectivement les valeurs critiques de l'apparition de rouleaux longitudinaux (voir la vue rapprochée) et de turbulence en paroi. La génération spontanée d'ondes inertielles est observée pour $\varepsilon > \varepsilon_{turb}$.

6.3.2 Caractérisation des ondes inertielles générées spontanément

Pour caractériser les ondes inertielles générées spontanément, nous avons effectué des simulations numériques, durant 30 périodes de libration, après un régime transitoire suffisamment long pour que la dynamique du fluide soit pleinement turbulente dans la couche d'Ekman. Un exemple est montré en figure 6.2(a) pour $\omega = 2,1$, $\varepsilon = 0,8$ et $E = 4 \times 10^{-5}$. Nous avons également représenté sur la figure 6.2(b) le spectre spatio-temporel de la vitesse radiale, u_r , à partir d'une coupe effectuée en $r = 0,2$ (ligne en tirets noirs sur la figure 6.2(a)). En plus de l'oscillation régulière de la vitesse radiale induite par le pompage d'Ekman à chaque cycle de libration, une structure en chevrons est visible, qui est caractéristique de la propagation d'ondes inertielles dans le volume.

Nous calculons en figure 6.3 le spectre associé au diagramme spatio-temporel pour obtenir des valeurs quantitatives des fréquences et des longueurs d'ondes associées aux ondes inertielles excitées. Une zone de forte amplitude est localisée en $\omega_{ex} = 2,1$ et pour de petites valeurs du nombre d'onde axial k_z . Cette zone est reliée au forçage direct à la fréquence $\omega = 2,1$ et témoigne de la variation de vitesse associée au pompage d'Ekman à chaque cycle de libration longitudinale. En plus de cette fréquence principale, nous observons une autre région d'amplitude conséquente autour de $\omega_{ex} \sim 1,6$ et $k_z \sim 3,5$ qui représente la signature des ondes inertielles excitées par la turbulence dans le volume.

La relation de dispersion des ondes inertielles fournit une relation entre l'angle de propagation θ et la fréquence ω des ondes : $\omega = 2 \cos \theta$ (Greenspan, 1968). Par conséquent, le pic observé autour de $\omega_{ex} \sim 1,6$ correspond à un angle entre le vecteur cylindrico-polaire \mathbf{e}_r et la direction de propagation de l'onde interielle de $\theta \sim 35^\circ$. Nous remarquons que cet angle est, en effet, l'angle préférentiel observé sur la figure 6.2(a). Cependant, les ondes inertielles reçues en différents points dans le volume, depuis l'équateur, correspondent à différents angles de propagation θ et donc à différentes fréquences excitées ω_{ex} .

Pour illustrer ceci, nous avons tracé le résultat de l'analyse temporelle du signal à différentes positions axiales pour un rayon constant $r = 0,2$. Les courbes qui en résultent sont tracées sur la figure 6.4(a). Pour toutes les positions axiales, un pic de grande amplitude est présent

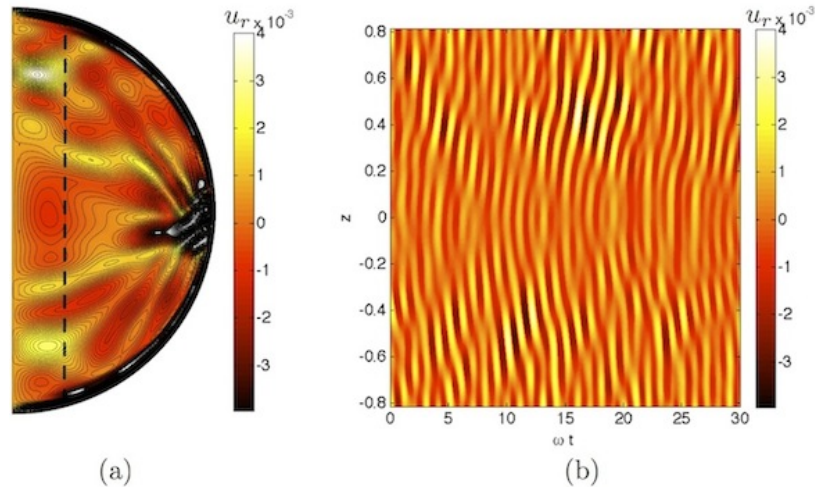


FIGURE 6.2 – (a) Champ de vitesse radiale u_r en $t \equiv 5\pi/(4\omega)$ pour $E = 4 \times 10^{-5}$, $\varepsilon = 0,8$ et $\omega = 2,1$. (b) Diagramme spatio-temporel axial de la vitesse u_r pendant 30 périodes en $r = 0,2$ et correspondant à la simulation numérique représentée sur la figure 6.2(a) (ligne en tirets). En plus de l'oscillation de la sphère, la propagation des ondes inertielles est visible.

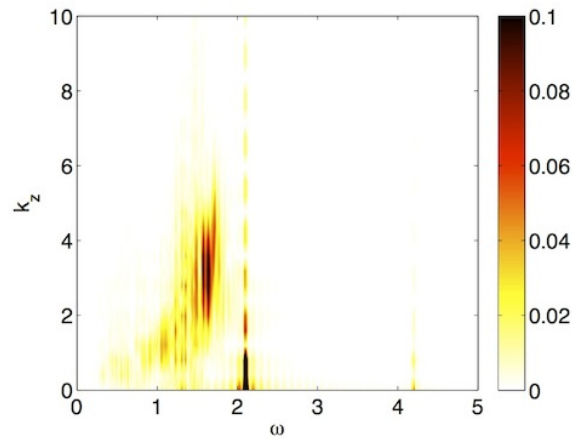


FIGURE 6.3 – Spectre spatio-temporel $P(\omega, k_z)$ pour les mêmes paramètres que la figure 6.2 et montrant la longueur d'onde axiale et la fréquence des ondes inertielles générées. La barre de couleur représente l'amplitude de $P(\omega, k_z)$.

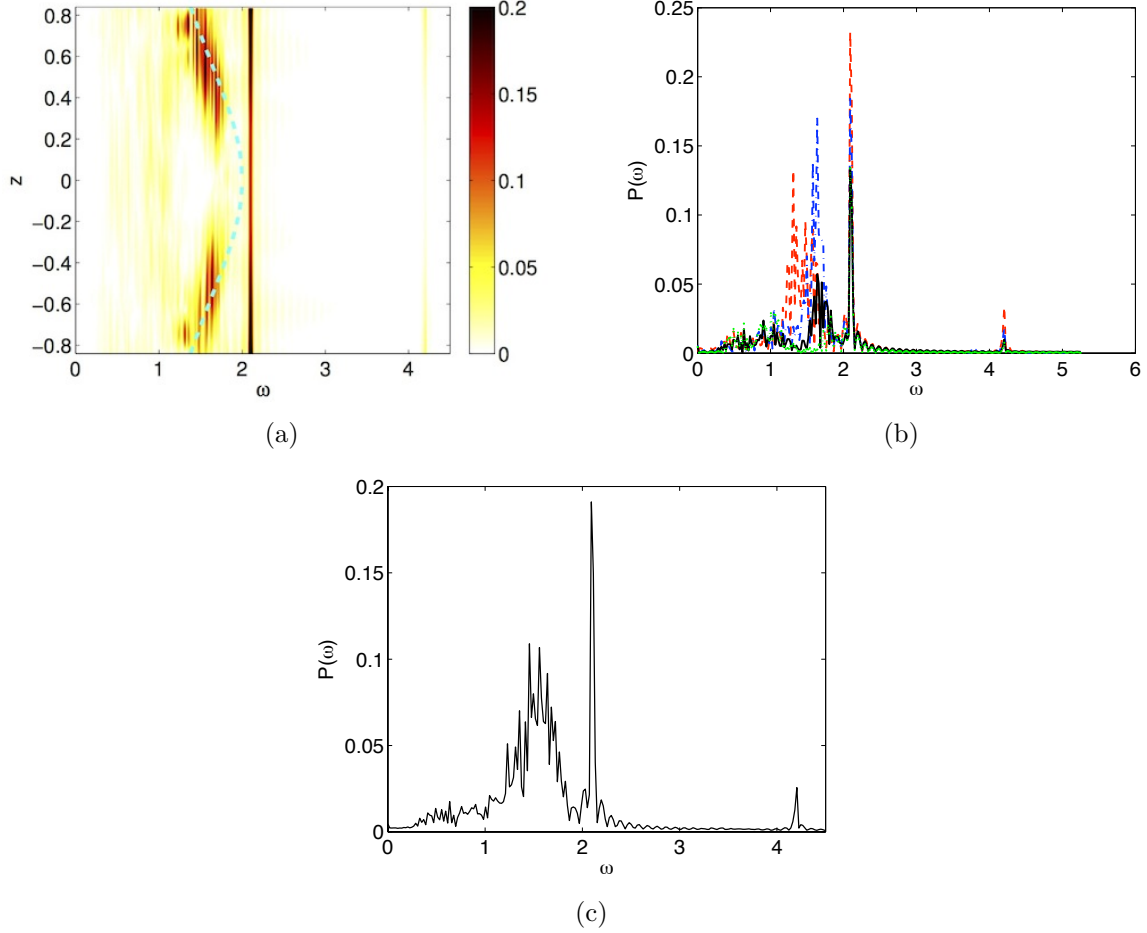


FIGURE 6.4 – (a) Spectre temporel $P(\omega)$ de la vitesse radiale u_r pour une coupe à $r = 0,2$ en fonction de la position axiale z et correspondant à la simulation numérique montrée sur la figure 6.2. La courbe en pointillés cyans représente la position théorique d'une onde inertielle émise depuis l'équateur [formule (6.4)]. (b) Spectre temporel $P(\omega)$ de la vitesse radiale u_r mesurée dans le volume au point $r = 0,2$ et différentes positions axiales : $z = 0$ (courbe en pointillés verts), $z = 0,25$ (courbe noire continue), $z = 0,5$ (courbe bleue en tirets-pointillés) et $z = 0,75$ (courbe en tirets rouges). (c) Moyenne suivant la coordonnée axiale z du spectre temporel $P(\omega)$ de la vitesse radiale u_r pris en $r = 0,2$. Les paramètres utilisés pour ces figures sont $E = 4 \times 10^{-5}$; $\varepsilon = 0,8$; $\omega = 2,1$.

à la fréquence de forçage, $\omega = 2,1$. Deux régions symétriques par rapport à l'équateur sont également présentes pour des fréquences comprises entre $\omega_{ex} \simeq 1,2$ et $\omega_{ex} \simeq 1,8$. Notons que l'amplitude du signal est non nulle mais beaucoup plus faible pour des fréquences $\omega_{ex} < 1,2$. Nous avons représenté sur la figure 6.4(b) le spectre temporel de la vitesse radiale u_r mesurée au point $r = 0,2$ pour différentes positions axiales : $z = 0$, $z = 0,25$, $z = 0,5$ et $z = 0,75$. La distribution des fréquences obtenues à l'équateur ($z = 0$) montre un signal faible, mais ne met pas en évidence de pic localisé bien défini, excepté à la fréquence de forçage. Puis, lorsque nous nous éloignons de l'équateur ($z = 0,25$), un premier pic apparaît autour de $\omega_{ex} \sim 1,6 - 1,8$. A mi-distance entre le pôle de la sphère et l'équateur, $z = 0,5$, la fréquence excitée montre un pic bien plus large en $\omega_{ex} \sim 1,5 - 1,7$. Finalement, proche des pôles, $z = 0,75$, le pic le plus large est localisé autour de $\omega_{ex} = 1,3 - 1,5$. Les figures 6.4(a) et 6.4(b) suggèrent qu'un point dans le volume en $(r; z)$ voit préférentiellement l'onde inertielle émise depuis l'équateur de la sphère avec un angle $\theta = \arccos(\omega/2)$ qui peut, géométriquement, passer en ce point. En effet, supposons que l'onde inertielle est émise depuis un point-source à l'équateur ($r = 1; z = 0$), la fréquence correspondante de l'onde qui passe dans le volume au point de coordonnées $(r; z)$ est donnée par la relation de dispersion des ondes inertielles et se traduit par

$$\omega = \frac{2(1-r)}{\sqrt{(1-r)^2 + z^2}}. \quad (6.4)$$

À partir de cette expression, nous pouvons tracer le trajet géométrique suivi par une onde émise depuis l'équateur de la sphère. Celui-ci est représenté 6.4(a) et semble bien indiquer que la fréquence préférentiellement observée en un point de la sphère correspond à une onde inertielle, émise depuis le point $(r = 1; z = 0)$, dont le trajet géométrique passe au point $(r; z)$ dans le volume. Nous pouvons également nous intéresser à une mesure globale des fréquences excitées dans la sphère. Pour ce faire, nous avons représenté sur la figure 6.4(c) la moyenne du spectre temporel suivant la coordonnée axiale z pour $r = 0,2$. Une fois de plus, un pic intense et localisé est observé pour la fréquence de forçage $\omega = 2,1$. Mais, en plus de ce pic principal, un pic secondaire est visible autour de $\omega = 1,4 - 1,6$ comme nous l'avons observé ci-dessus et également en géométrie cylindrique (Sauret *et al.*, 2012a). De ces premières observations, il apparaît que pour une position radiale r donnée, la fréquence préférentiellement excitée ω_{ex} dépend de la coordonnée axiale z . Mais, en plus de cette propriété géométrique des ondes inertielles, la moyenne axiale du spectre temporel montre clairement une concentration d'énergie localisée dans la gamme de fréquence $\omega_{ex} = 1,4 - 1,6$.

Les figures 6.5(a), (b), (c) & (d) présentent le spectre temporel $P(\omega)$ en fonction de la coordonnée axiale z pour différentes positions radiales r . Les simulations numériques ont été effectuées pour $\omega = 2,1$, $\varepsilon = 0,7$ et $E = 4 \times 10^{-5}$. Nous avons également représenté la fréquence de l'onde inertielle mesurée en chaque point (r, z) correspondant à une onde émise depuis l'équateur. Ceci confirme les observations précédentes : la fréquence préférentiellement excitée en un point du volume correspond à une onde inertielle émise en $r = 1$ et $z = 0$ et passant par le point considéré. Ces figures suggèrent que la concentration de l'énergie en un point se fait par un pur mécanisme géométrique au cours de la propagation. Mais, la figure 6.4(c) met en évidence qu'un second mécanisme, en plus de la sélection géométrique, est à l'oeuvre pour concentrer l'énergie autour de la fréquence $\omega_{ex} \sim 1,6$. Ce mécanisme apparaît au cours de la propagation et comme nous allons le voir ci-dessous est induit par l'interférence des différentes ondes émises. De plus, la viscosité est également susceptible de jouer un rôle dans ces observations.

Cette concentration de l'énergie au cours de la propagation apparaît clairement si l'on mesure la moyenne axiale du spectre temporel $P(\omega)$ associé à la vitesse radiale u_r pour différentes

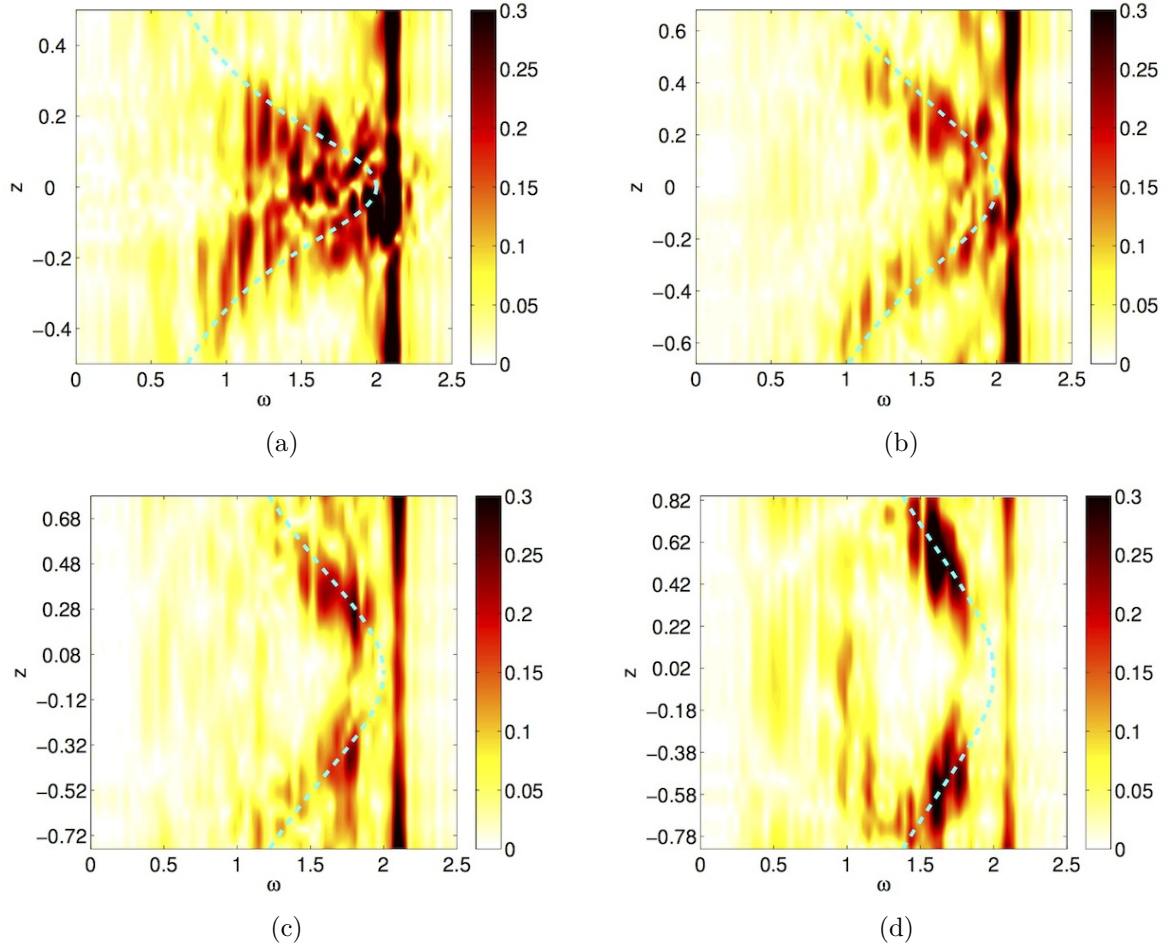


FIGURE 6.5 – Spectre temporel $P(\omega)$ en fonction de z pour des coupes effectuées à différentes positions radiales : (a) $r = 0,8$, (b) $r = 0,6$, (c) $r = 0,4$, (d) $r = 0,2$. Les courbes en pointillés cyan représentent la position théorique d'une onde inertielle émise depuis l'équateur (formule (6.4)). Les paramètres utilisés dans la simulation sont $\omega = 2,1$, $\varepsilon = 0,7$ et $E = 4 \cdot 10^{-5}$.

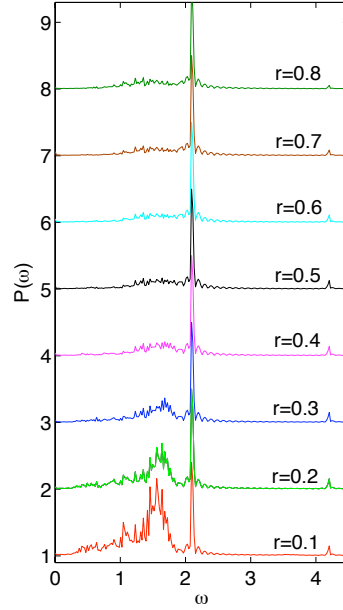


FIGURE 6.6 – Moyenne axiale du spectre temporel de la vitesse radiale u_r pour $\varepsilon = 0,8$, $\omega = 2,1$ et $E = 4 \times 10^{-5}$ mesurée en 8 rayons équidistants de $r = 0,1$ à $r = 0,8$.

distances r à la source. Les résultats sont présentés sur la figure 6.6. Pour tous les signaux, un pic localisé en $\omega_{ex} = 2,1$ est visible et est causé par le forçage direct à la fréquence de libration. Puis, loin de la source, par exemple en $r = 0,1$ ou $r = 0,2$, un second signal apparaît également autour de $1,4 - 1,6$ comme mentionné précédemment. Cependant, ce diagramme montre que le second signal devient d'amplitude conséquente uniquement loin de la source. En pratique, on peut estimer que près de la source, par exemple en $r = 0,8$, toutes les fréquences sont présentes et le signal apparaît plus faible et moins localisé. Puis lorsque l'on s'éloigne de cette source turbulente, le signal devient plus intense et plus localisé autour de la gamme de fréquences caractéristiques $\omega_{ex} \sim 1,4 - 1,6$.

Une analyse spatio-temporelle, présentée sur les figures 6.7(a)-(d), montre qu'un processus de sélection est également présent pour le vecteur d'onde k_z . Au voisinage de l'équateur, c'est-à-dire près de la source turbulente, le vecteur d'onde axial se situe dans la gamme $k_z \sim 1 - 10$ (figure 6.7(a)). Mais lorsque l'on s'éloigne de la région turbulente, (voir les figures 6.7(b)-(d) correspondant respectivement à $r = 0,6$, $r = 0,4$ et $r = 0,2$), k_z devient plus localisé autour de $k_z \sim 2 - 4$. Malheureusement, les valeurs de nombre d'Ekman que nous pouvons étudier dans nos simulations numériques, tout en conservant un écoulement instable, ne sont pas assez étendues pour fournir une étude systématique de la variation du nombre d'onde en fonction du nombre d'Ekman. Des études systématiques ultérieures devront être effectuées à l'aide d'un code plus performant pour caractériser cette dépendance.

6.3.3 Influence de l'amplitude de forçage

Nous avons également effectué une étude systématique de l'écoulement généré dans le volume pour différentes amplitudes de libration ε , un nombre d'Ekman donné $E = 4 \times 10^{-5}$ et une fréquence de libration fixée $\omega = 2,1$. La figure 6.8(a) présente la moyenne axiale des spectres

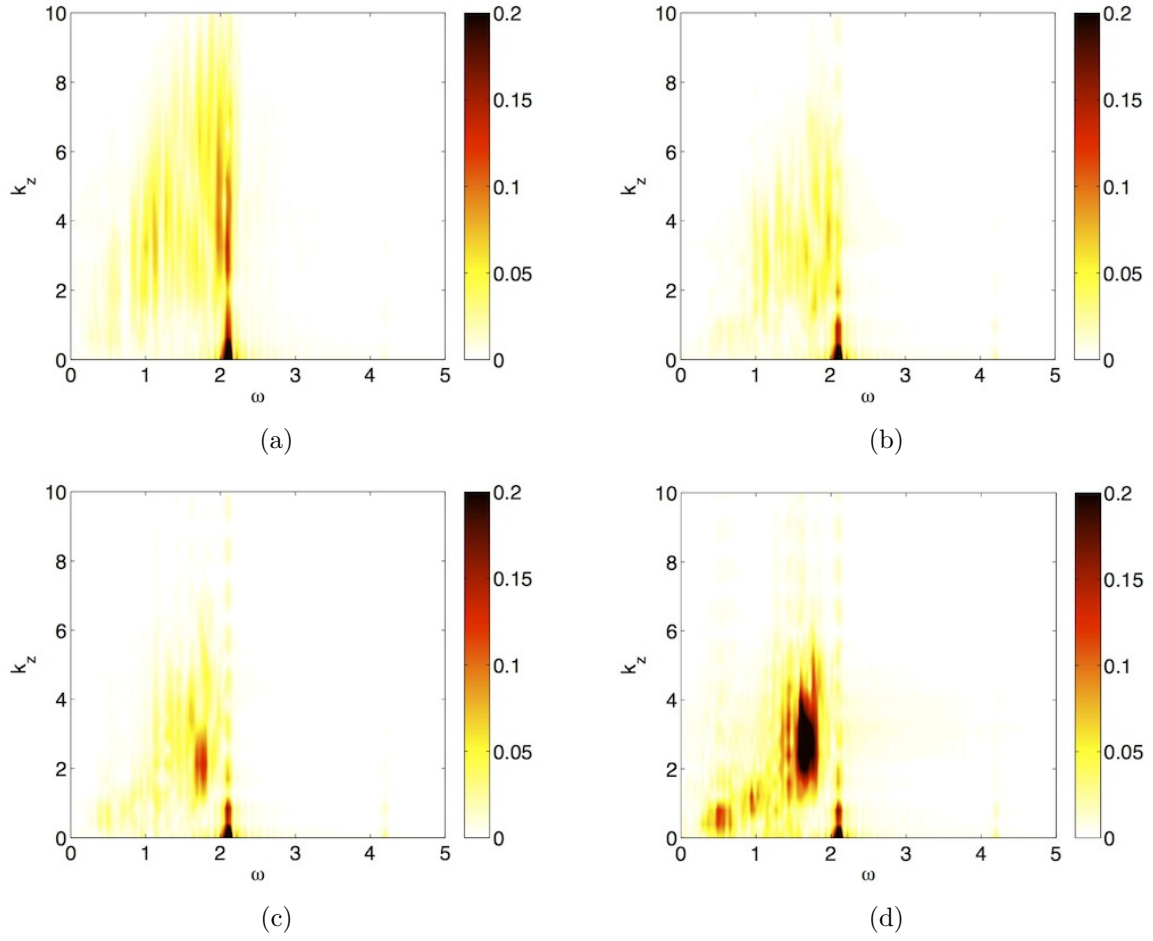


FIGURE 6.7 – Spectre spatio-temporel $P(k_z, \omega)$ de la vitesse radiale u_r pour des coupes effectuées à différentes positions radiales : (a) $r = 0,8$; (b) $r = 0,6$; (c) $r = 0,4$; (d) $r = 0,2$. Les paramètres utilisés dans cette simulation numérique sont $E = 4 \times 10^{-5}$, $\omega = 2,1$ et $\varepsilon = 0,7$.

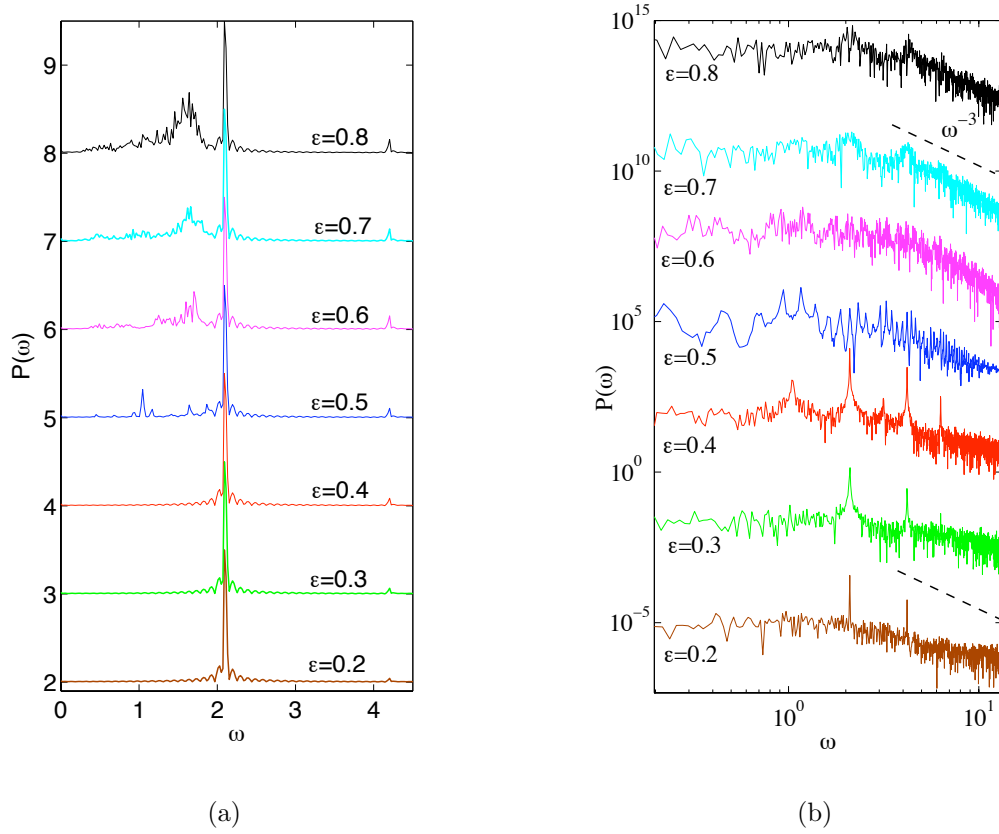


FIGURE 6.8 – (a) Moyenne axiale du spectre temporel de la vitesse radiale u_r en $r = 0,2$ pour $\omega = 2,1$, $E = 4 \times 10^{-5}$ et différentes amplitudes de libration longitudinale ε . (b) Spectre temporel de la vitesse axiale mesurée au voisinage de la paroi extérieure au point $(r = 0,99; z = 0,1)$ pour les mêmes paramètres que la figure (a).

temporels obtenus pour $r = 0,2$ et la figure 6.8(b) présente les spectres temporels correspondant dans la couche visqueuse ($r = 0,99$; $z = 0,01$). Partant d'une amplitude de libration, $\varepsilon = 0,2$, l'écoulement reste stable dans le volume et dans la couche limite. De plus, le seul pic observable correspond à la fréquence de forçage $\omega = 2,1$. Aucune onde inertielle ne se propage dans le volume car la fréquence de libration est supérieure à 2. Puis, en augmentant l'amplitude de libration jusqu'à $\varepsilon = 0,5$, nous observons l'apparition d'un second pic, localisé autour de $\omega = 1,05$. Il correspond à un phénomène de doublement de période comme observé dans le cas du cylindre (Lopez & Marques, 2011; Sauret *et al.*, 2012a). Puis, pour une amplitude de forçage plus élevée, $\varepsilon \geq 0,6$, l'instabilité centrifuge évolue en une région turbulente dans la couche d'Ekman. La figure 6.8(b) montre que l'écoulement turbulent est caractérisé par un spectre temporel quasi-constant pour des fréquences inférieures à la fréquence de forçage ω , et par une pente en ω^{-3} caractéristique d'une turbulence 2D pour $\omega > \omega_{lib}$ (voir par exemple Kraichnan, 1967; Boffetta & Ecke, 2012). De plus, un pic bien défini autour de $\omega_{ex} \sim 1,4 - 1,6$ est observé dans le volume (figure 6.8(a)). Ainsi, dès l'instant où une région turbulente est générée dans un écoulement en rotation, des ondes inertielles sont générées conduisant à un signal moyen piqué autour de $\omega = 1,4 - 1,6$.

6.3.4 Observations pour différentes fréquences de libration

Finalement, nous avons effectué les mêmes analyses pour d'autres fréquences de libration longitudinale : $\omega = 0,1$ (figures 6.9(a)-(b)) et $\omega = 3$ (figures 6.9(c)-(d)). Sur ces deux simulations, des ondes inertielles sont excitées dans le volume suivant différents angles de propagation. Cette observation est cohérente avec le cas étudié précédemment pour $\omega = 2,1$. Dans les deux cas, la moyenne axiale du spectre temporel, pris en $r = 0,2$ met en évidence un pic important à la fréquence de forçage direct, respectivement $\omega = 0,1$ et $\omega = 3$. Pour $\omega = 3$, la situation est similaire au cas précédent, $\omega = 2,1$, avec un pic localisé autour de $\omega_{ex} \sim 1,4 - 1,6$. Pour $\omega = 0,1$, une gamme plus étendue de fréquences est excitée dans le volume mais le maximum du spectre temporel se situe toujours autour de $\omega \sim 1,5$. Cette distribution plus large peut être expliquée par l'étendue latitudinale de la région turbulente qui n'est plus réellement localisée au voisinage de l'équateur pour $\omega = 0,1$ (voir figure 6.9(a)). Par conséquent, un point donné dans le volume voit plus d'ondes inertielles avec différents angles. Notons que les simulations effectuées pour la plus petite fréquence de libration, $\omega = 0,1$, permettent d'exciter par forçage direct des ondes inertielles dans le volume, correspondant au pic observé pour $\omega_{ex} = 0,1$ sur la figure 6.9(b). Mais, le mécanisme de génération spontanée d'ondes inertielles par un écoulement turbulent décrit dans ce chapitre est totalement générique et se superpose au forçage direct. Ces deux cas confirment la situation décrite précédemment et montrent que cette dynamique ne dépend pas de la fréquence de libration.

6.4 Comparaison avec un modèle analytique idéalisé

6.4.1 Onde émise dans le volume

Contrairement à la génération d'ondes internes par un écoulement turbulent dans un fluide stratifié, qui a fait l'objet de plusieurs études (voir par exemple Townsend, 1966; Bonneton *et al.*, 1993; Dohan & Sutherland, 2003, 2005; Taylor & Sarkar, 2007; Munroe & Sutherland, 2008; Ansong & Sutherland, 2010), la génération spontanée d'ondes inertielles dans un écoulement tournant par une région turbulente n'a jamais été étudiée. Les études menées en milieu

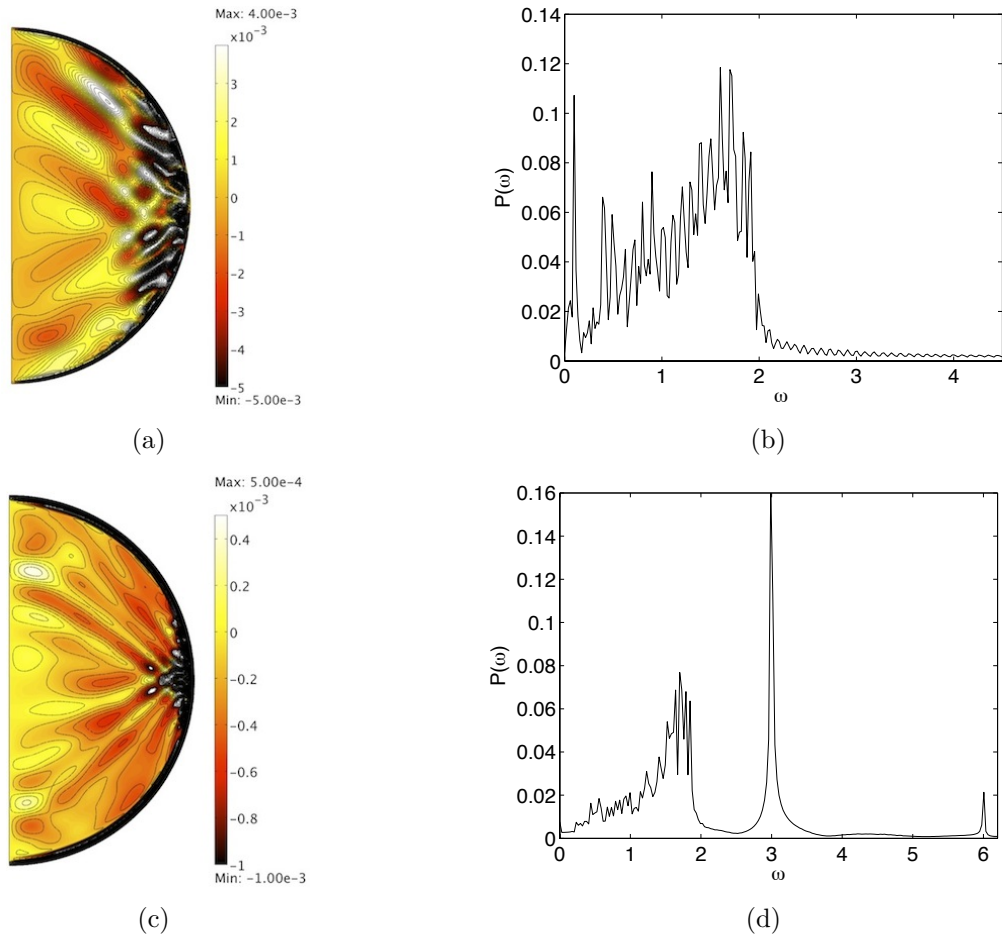


FIGURE 6.9 – Champ de vitesse radiale u_r pour $E = 4 \times 10^{-5}$, $\varepsilon = 0.8$, (a) $\omega = 0.1$ et (c) $\omega = 3$. Moyenne axiale des spectres temporels correspondant, pris en $r = 0.2$ pour (b) $\omega = 0.1$ et (d) $\omega = 3$.

stratifié sont tout particulièrement intéressantes car les écoulements tournants et les écoulements stratifiés partagent de nombreux points communs (Veronis, 1970). Par conséquent, un mécanisme similaire s'appliquant aux écoulements en rotation pourrait expliquer le phénomène observé.

Nous soulignons que le modèle analytique présenté dans cette section est encore préliminaire et nécessite de futures études. Néanmoins, ces premiers résultats théoriques suggèrent que l'étude de l'émission des ondes inertielles à partir d'une perturbation initiale pourrait expliquer les deux principales caractéristiques observées en géométrie sphériques : la concentration de l'énergie en un point se fait par un pur mécanisme géométrique au cours de la propagation mais la fréquence moyenne excitée se situe dans la gamme $\omega_{ex} \sim 1,4 - 1,6$.

En suivant le raisonnement effectué par Townsend (1966), le mécanisme responsable de la génération et de la sélection préférentielle d'une gamme de fréquences des ondes inertielles se propageant dans le volume peut être compris à l'aide d'un modèle linéaire. Nous considérons un système de coordonnées 2D où l'origine est placée à l'équateur, l'axe (Oz) est parallèle à l'axe de rotation et l'axe (Ox) est perpendiculaire à cet axe, on a donc $x = 1 - r$. Ce repère est présenté sur la figure 6.10. Le forçage de libration longitudinale induit un écoulement turbulent localisé au voisinage de $(x = 0, z = 0)$. Pour simplifier le problème, nous ignorons la présence de l'interface courbe de la sphère et la géométrie tridimensionnelle du problème. Ceci est une limitation de notre modèle car on ignore ainsi la focalisation de l'énergie par le confinement lorsque les ondes inertielles émises voyagent vers le centre de la sphère. Néanmoins, comme le souligne Townsend (1966), la physique responsable de phénomène observé doit pouvoir se comprendre à partir d'un modèle bidimensionnel.

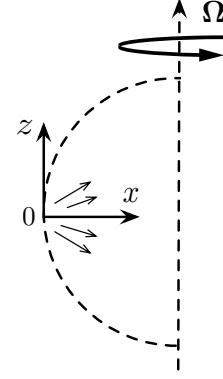


FIGURE 6.10 – Système de coordonnées utilisé. Le point source est localisé au niveau de l'équateur de la sphère, en $(0,0)$.

De plus, les conditions aux limites de continuité de la vitesse normale et des contraintes doivent être appliquées entre les couches limites turbulentes et l'écoulement en volume. Or, excepté au voisinage des zones où on peut avoir une éruption des couches limites, la vitesse normale à la frontière entre ces deux zones est nulle. Ainsi, comme la viscosité est supposée nulle dans le volume, la condition de continuité sur les contraintes se ramène à une condition de continuité sur la pression. Nous allons ainsi considérer dans la suite une impulsion initiale pour la pression et étudier comment celle-ci se propage dans le volume. De plus, afin de simplifier le calcul et garder un modèle simple, nous supposons que la région turbulente bidimensionnelle génère une perturbation que l'on peut modéliser par une distribution gaussienne, à la fois dans le temps et dans la direction axiale z . Cette perturbation se traduit pour la pression par :

$$p_{init} = p_0 \exp \left[-\frac{z^2}{2\alpha^2} - \frac{t^2}{2\tau^2} \right], \quad (6.5)$$

où p_0 est l'amplitude de la perturbation en pression, α et τ sont les échelles de temps et de longueur qui mesurent la durée et l'extension verticale de la perturbation initiale. Dans la suite, du fait des symétries du problème, nous considérons la région définie par $x > 0$ et $z > 0$. La

transformée de Fourier de l'expression (6.5) conduit à

$$\begin{aligned}\hat{p}_{init} &= \iint dz dt p_{init} \exp[-i k_z z + i \omega t] \\ &= 2 \pi p_0 \alpha \tau \exp\left[-\frac{\alpha^2}{2} k_z^2 - \frac{\tau^2}{2} \omega^2\right]\end{aligned}\quad (6.6)$$

Nous considérons maintenant la propagation de cette perturbation. Chaque onde inertielle se propage suivant

$$(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{u}_0, p_0) \exp\left[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) - \nu |\mathbf{k}|^2 t\right] \quad (6.7)$$

où ν représente la viscosité du fluide, $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$ le vecteur d'onde et ω la fréquence de l'onde inertielle. Le terme $\exp(-\nu |\mathbf{k}|^2 t)$ représente donc une correction visqueuse. La relation de dispersion des ondes inertielles, $\omega = 2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_z / |\mathbf{k}|$, conduit à :

$$\omega^2 = \frac{4}{1 + (k_x/k_z)^2} \quad \text{soit} \quad k_x = \pm k_z \sqrt{\frac{4}{\omega^2} - 1} \quad (6.8)$$

Puis, à partir des expressions (6.6) et (6.7), la pression en un point (x, z) et au temps t s'écrit

$$p(x, z, t) = \frac{1}{4 \pi^2} \iint dk_z d\omega \hat{p}_{init} \exp\left[i(k_x x + k_z z - \omega t) - \nu(k_x^2 + k_z^2)t\right]. \quad (6.9)$$

Nous utilisons la relation (6.8) pour substituer k_x dans l'expression (6.9) puis nous intégrons cette expression suivant le vecteur d'onde axial k_z . On obtient alors

$$p(x, z, t) = \int d\omega \frac{\alpha \tau p_0}{\sqrt{2 \pi} \sqrt{\alpha^2 + 8 \nu t / \omega^2}} \exp\left[-\frac{\omega^2 \tau^2}{2} - i \omega t\right] \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(z \pm x \sqrt{4/\omega^2 - 1})^2}{\alpha^2 + 8 \nu t / \omega^2}\right] \quad (6.10)$$

A partir de cette relation, nous voyons que la contribution du dernier terme, qui correspond à la propagation de l'onde, est localisée près des droites définies par

$$z \sim \pm x \sqrt{\frac{4}{\omega^2} - 1} \quad (6.11)$$

Cette condition signifie que la fréquence de l'onde inertielle doit être proche de

$$\omega_r = \pm \frac{2}{\sqrt{1 + z^2/x^2}} \quad (6.12)$$

Par conséquent, dans la région $x > 0$ et $z > 0$, nous pouvons approximer le dernier terme de l'expression (6.10), qui est associé à la propagation des ondes, par

$$\exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(z \pm x \sqrt{4/\omega^2 - 1})^2}{\alpha^2 + 8 \nu t / \omega^2}\right] \sim \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{4 x^2}{\omega_r^2 z}\right)^2 \frac{(\omega - \omega_r)^2}{\alpha^2 + 8 \nu t / \omega_r^2}\right] \quad (6.13)$$

où on a développé l'expression à l'ordre le plus bas en $(\omega - \omega_r)$. Pour pouvoir obtenir une approximation analytique de cette intégrale, supposons que

$$\frac{4 x^2}{\omega_r^2 z} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 8 \nu t / \omega_r^2}} \gg \tau \quad (6.14)$$

Cette condition signifie que nous considérons des perturbations de courtes durées ou que l'on étudie le signal loin de la source. De plus nous pouvons réécrire l'expression de la pression sous la forme

$$p = \int d\omega \frac{\alpha \tau p_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-\omega^2 \tau^2/2)}{\sqrt{\alpha^2 + 8\nu t/\omega^2}} \exp \left[-i\omega t - \frac{1}{2} \left(\frac{4x^2}{\omega_r^2 z} \right)^2 \frac{(\omega - \omega_r)^2}{\alpha^2 + 8\nu t/\omega_r^2} \right] \quad (6.15)$$

De manière similaire à [Townsend \(1966\)](#), nous utilisons la méthode de la phase stationnaire qui nous permet d'obtenir une expression de cette intégrale. La méthode de la phase stationnaire permet d'obtenir une approximation de la forme

$$\int d\omega g(\omega) e^{h(\omega)} = \sqrt{\frac{2\pi}{h''(\omega_0)}} g(\omega_0) \exp(h(\omega_0)) \quad (6.16)$$

où ω_0 est telle que $h'(\omega_0) = 0$. Nous posons alors

$$g(\omega) = \frac{\alpha \tau p_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-\omega^2 \tau^2/2)}{\sqrt{\alpha^2 + 8\nu t/\omega^2}} \quad \text{et} \quad h(\omega) = -i\omega t - \frac{1}{2} \left(\frac{4x^2}{\omega_r^2 z} \right)^2 \frac{(\omega - \omega_r)^2}{\alpha^2 + 8\nu t/\omega_r^2}. \quad (6.17)$$

Pour avoir $h'(\omega_0) = 0$, ω_0 doit s'écrire

$$\omega_0 = \omega_r - i t \left[\frac{\omega_r^2 z \sqrt{\alpha^2 + 8\nu t/\omega_r^2}}{4x^2} \right]^2. \quad (6.18)$$

Avec la condition (6.14), et en gardant seulement les termes d'ordre dominant, nous obtenons une expression approchée de la pression :

$$p = p_0 \alpha \tau \frac{\omega_r^2 z}{4x^2} \exp(-i\omega_r t) \exp \left(-\frac{\omega_r^2 \tau^2}{2} \right) \exp \left[-\frac{t^2}{32} \frac{\omega_r^4 z^2 \alpha^2}{x^4} - \frac{\nu t^3 \omega_r^2 z^2}{4x^4} \right]. \quad (6.19)$$

En supposant que le signal obtenu dans le volume est la superposition des excitations effectuées à chaque cycle de libration, nous pouvons voir que différents angles de propagation des ondes inertielles sont possibles. En pratique, la fréquence d'une onde inertielle en un point (x, z) dans le volume est liée à la fréquence $\omega_r = 2/\sqrt{1 + z^2/x^2}$ et à l'épaisseur de l'onde inertielle excitée. Cependant, en fonction de la fréquence de l'onde inertielle, le signal mesuré dans le volume est plus ou moins amorti en fonction des interférences et de l'atténuation visqueuse. Par conséquent, si nous moyennons le signal pour une position radiale donnée x , nous devons être capables de mesurer les ondes émises avec la plus grande amplitude.

A ce stade, nous devons déterminer les grandeurs caractéristiques des paramètres α , τ et p_0 . Ces travaux sont toujours en cours et nous présentons ici les premières pistes de réflexion qui devront être confirmées et poursuivies dans le futur.

6.4.2 Perspectives analytiques

La figure 6.11(a) montre la solution (6.19) pour les paramètres $\nu = 10^{-5}$, $\alpha = 0,1$, $\tau = 0.1$ pour $x = 0,9$ (ce qui correspond à une droite verticale proche de l'axe de rotation). Si on trace les profils analytiques pour différentes valeurs des paramètres, on remarque que les valeurs de α et ν ne modifient pas la solution obtenue, à un facteur d'amplitude près. Par contre, la valeur de τ doit être choisie comme suffisamment faibles pour que la solution analytique converge également vers un profil donnée. On remarque que cette condition est imposée par la relation (6.14).

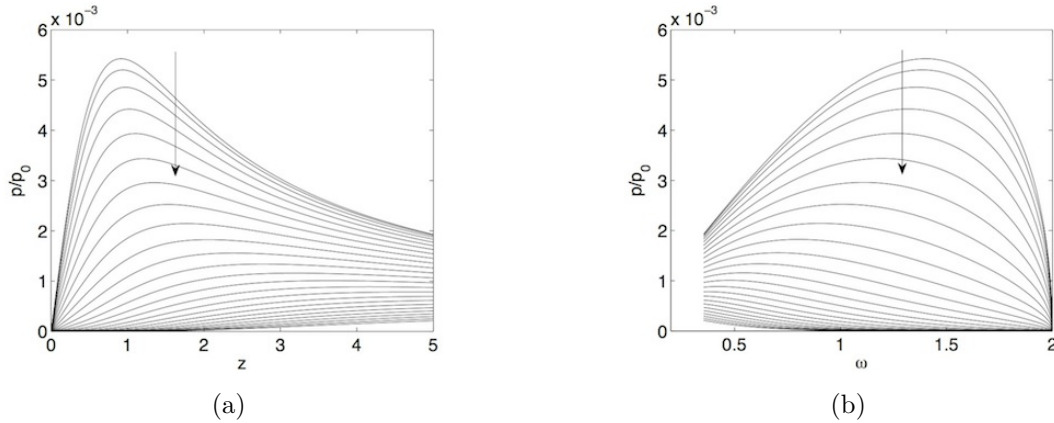


FIGURE 6.11 – (a) Solution analytique p/p_0 en fonction de z calculée en $x = 0.9$ à partir de l'expression (6.19) avec $\nu = 10^{-5}$, $\alpha = 0.1$, $\tau = 0.1$. (b) Amplitude relative p/p_0 , pour les mêmes paramètres que (a) mais en fonction de la fréquence ω . Les courbes sont tracées tous les $\Delta t = 0.01$ et les flèches indiquent la direction du temps.

Prendre une faible valeur de τ n'est pas totalement aberrant, car le temps caractéristique des impulsions est fixé par l'écoulement turbulent. Néanmoins, ce résultat est encore intermédiaire et des travaux futurs sont nécessaires pour déterminer la valeur de ce paramètre à partir de nos observations numériques.

Aux temps courts, le profil de pression est maximum en $x = 0.9$ pour $z = 0.92$. A l'aide de la relation 6.12, nous pouvons traduire ce résultat sous forme de la fréquence excitée. Le résultat est présenté en figure 6.11(b) pour les mêmes paramètres. Il apparaît clairement l'amplitude maximale de la pression dans le volume conduit à une pulsation $\omega_{ex} \simeq 1.42$. Cette valeur est assez proche de la fréquence préférentiellement excitée obtenue à l'aide de nos simulations numériques.

Ces premiers résultats analytiques suggèrent que la fréquence des ondes inertielles générées spontanément par un écoulement turbulent est préférentiellement de l'ordre de $\omega_{ex} \simeq 1.42 - 1.5$. Notons que contrairement aux travaux de Dohan & Sutherland (2005) et Taylor & Sarkar (2007), les effets visqueux ne sont qu'un élément secondaire du mécanisme de sélection de la fréquence, en accord avec les résultats théoriques de Townsend (1965, 1966). Soulignons que ces résultats sont préliminaires et nécessitent, en particulier, de déterminer précisément comment modéliser le temps caractéristique de l'impulsion initiale ainsi que son amplitude. Néanmoins, nous avons tenu à les présenter dans ce manuscrit, car ils permettent de se faire une première idée du mécanisme responsable de la propagation et de la sélection des fréquences excitées.

6.5 Génération spontanée d'ondes inertielles dans un cylindre

Après avoir considéré la géométrie sphérique où une zone turbulente est générée localement près de l'équateur, nous considérons un cylindre, soumis au même forçage de libration longitudinale. Nous nous plaçons toujours dans des situations où l'amplitude de libration ε est suffisamment importante pour générer une région turbulente au voisinage de la paroi extérieure.

Nous avons reporté sur les figures 6.12(a), (b) & (c) la dérivée axiale de la vitesse radiale, $\partial_z u_r$, permettant d'obtenir une bonne visualisation des ondes inertielles générées. Pour les trois fréquences considérées, $\omega = 2.5$, $\omega = 0.1$ et $\omega = 4.1$, nous sommes bien au-delà du seuil d'insta-

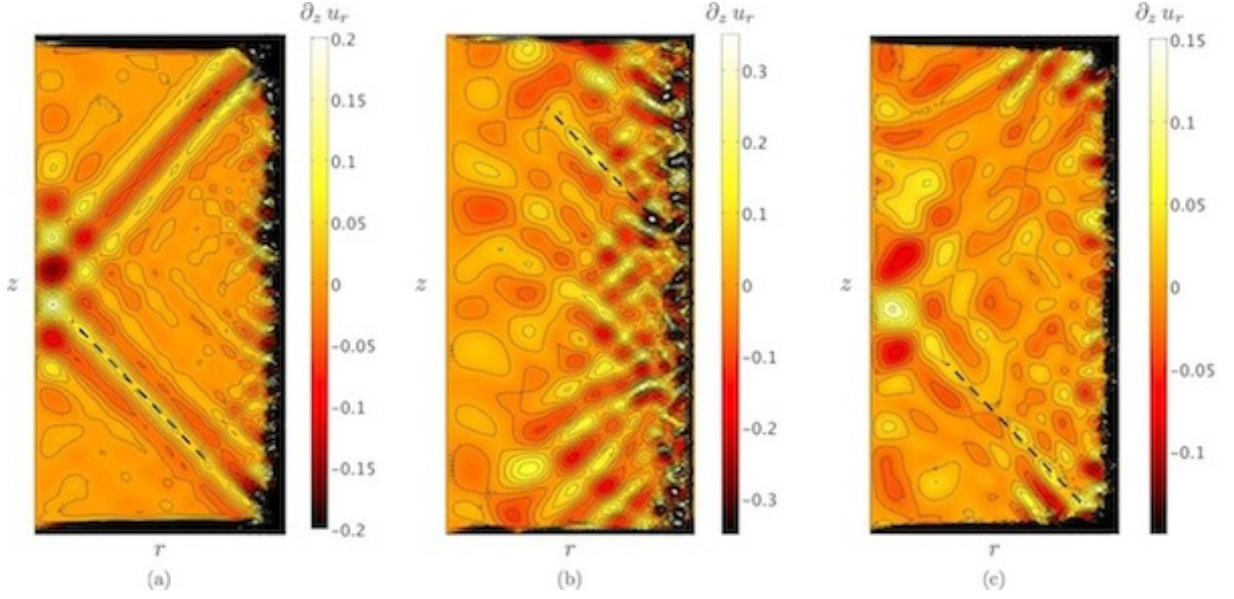


FIGURE 6.12 – Dérivée axiale de la vitesse radiale, $\partial_z u_r$ dans un cylindre de rapport d'aspect $H/R = 2$ soumis à un forçage de libration longitudinale. Les champs sont pris à l'instant $t = 3\pi/(2\omega)$ pour (a) $\omega = 2,5$, $\varepsilon = 0,70$, (b) $\omega = 0,1$, $\varepsilon = 0,6$ et (c) $\omega = 4,1$, $\varepsilon = 0,85$. Le nombre d'Ekman est égal à $E = 3 \times 10^{-5}$. L'amplitude de la barre de couleurs est choisie pour faciliter la visualisation des ondes inertielles émises spontanément dans le volume. Les lignes en tirets indiquent une orientation de 45° .

bilité et générons un écoulement turbulent dans la couche limite. Nous observons alors, comme dans le cas de la sphère, des ondes inertielles générées spontanément dans le volume. Néanmoins, une différence majeure est que, dans le cas cylindre, un seul angle, $\theta \approx 40 - 50^\circ$, semble être présent.

Pour comparer ces résultats directement au cas de la sphère, nous pouvons effectuer une simulation numérique en géométrie cylindrique pour les mêmes paramètres qu'utilisés précédemment ($\omega = 2,1$, $\varepsilon = 0,7$ et $E = 4 \times 10^{-5}$). La figure 6.13(a) présente le spectre temporel $P(\omega)$ en fonction de la coordonnée axiale z pour une position radiale $r = 0,2$. Contrairement au cas de la sphère, la fréquence préférentiellement excitée en un point du volume est quasiment constante quelle que soit la valeur de z . Nous notons une amplitude importante pour $\omega = 2,1$ qui correspond à la fréquence de forçage directe, puis une fréquence $\omega_{exc} = \omega/2 = 1,05$, induite par un mécanisme de doublement de période (Lopez & Marques, 2011). Une région d'amplitude conséquente, moins localisée, est visible pour $\omega_{exc} \sim 1,6$. Cette zone peut s'expliquer à l'aide du mécanisme proposé précédemment. Un point situé en $(r; z)$ reçoit les contributions venant du bord du cylindre. Si le cylindre est de hauteur suffisante, il existe toujours une zone, excepté près des parois supérieure et inférieure, où une onde émise de la paroi latérale avec un angle de $\theta \sim 45^\circ$ peut l'atteindre. Ainsi, seul le processus de sélection est présent dans cette situation. Notons que la moyenne du spectre temporelle suivant la coordonnée axiale z , présentée en figure 6.13(b), est similaire au cas de la sphère.

Nous pouvons, ici aussi, étudier différentes fréquences de forçage. Nous avons tracé sur les figures 6.14(a), (b) & (c), la moyenne axiale des spectres temporels correspondant aux cas présentés sur les figures 6.12(a), (b) & (c). Sans surprise, pour toutes les configurations, nous observons un pic localisé à la fréquence de forçage, plus précisément $\omega = 2,5$ pour la figure 6.12(a), $\omega = 0,1$ pour la figure 6.12(b), et $\omega = 4,1$ pour la figure 6.12(c). En plus de ce pic

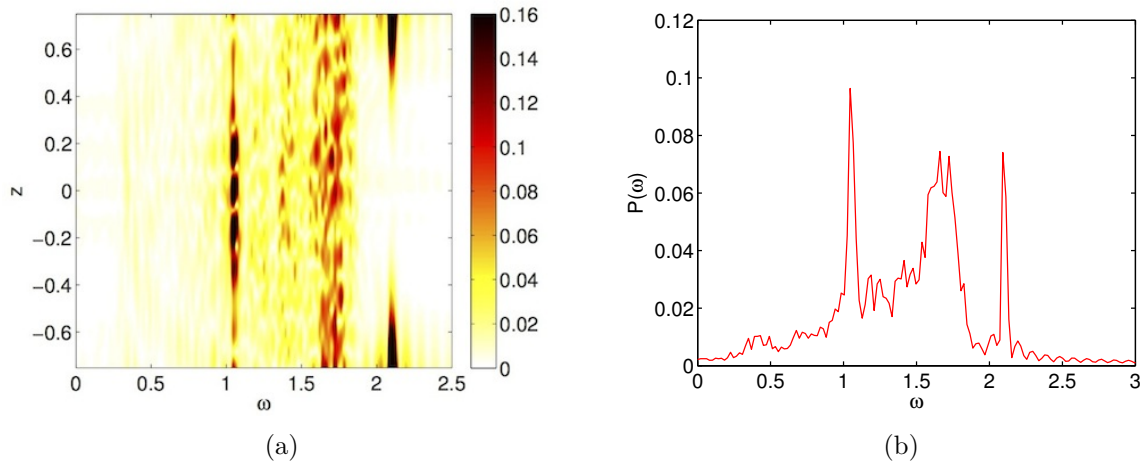


FIGURE 6.13 – (a) Spectre temporel $P(\omega)$ de la vitesse radiale u_r pour une coupe à $r = 0,2$ en fonction de la position axiale z pour un cylindre de rapport d'aspect $H/R = 2$ et $E = 4 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon = 0,8$, $\omega = 2,1$. (b) Moyenne suivant la coordonnée axiale z du spectre temporel $P(\omega)$ présenté sur la figure (a).

localisé, les diagrammes obtenus sont similaires à ceux de la sphère avec un second pic localisé approximativement autour de $\omega \sim 1,4 - 1,5$ qui correspond à la fréquence des ondes inertielles orientées à 45° . En effet, la structure observée est également la direction de la vitesse de groupe des paquets d'ondes inertielles qui est relié à sa fréquence par la relation $\omega = 2 \sin \theta$ (Greenspan, 1968). Cette relation nous donne $\omega \approx 1,41$ pour $\theta \approx 45^\circ$.

Le cas présenté en figure 6.12(a) pour la fréquence de forçage $\omega = 2,5$ a été récemment étudié par (Lopez & Marques, 2011). Ils ont également mis en évidence la présence de structure cohérente dans le volume et ont estimé que les modes inertiels oscillent à la fréquence $\omega/2$ induit par un mécanisme de doublement de période. Ici, ce mécanisme conduit à une fréquence d'excitation $\omega_{ex} = 1,25$ qui correspond au second pic sur la figure 6.14(a). Notons que les structures observées sur la figure 6.12(a), en particulier les deux faisceaux d'ondes inertielles émis depuis les coins, ne correspondent pas à ce mode inertiel. Nous pensons que ces structures émises depuis les coins sont associées à un écoulement turbulent plus fort au voisinage des coins pour cette fréquence de forçage particulière.

La figure 6.12(b) à la fréquence $\omega = 0,1$ correspond au cas où la structure des ondes inertielles émises est la plus visible et la plus régulière. Le spectre temporel présente également un pic au voisinage de $\omega \approx 1,4$ dans ce cas. Notons que les autres pics visibles sur le spectre temporel (pour $\omega = 0,2, 0,3, \dots$) correspondent aux harmoniques associées à la fréquence de forçage.

Finalement la figure 6.12(c) à la fréquence de forçage $\omega = 4,1$ est particulièrement intéressante car dans ce cas le mécanisme de doublement de période proposé par Lopez & Marques (2011) ne peut pas être présent. En effet, $\omega/2$ n'est pas la gamme de fréquence des ondes inertielles, $\omega \in [0; 2]$ dans ce cas. Les structures associées aux ondes inertielles observées ne peuvent donc pas être reliées à la fréquence de forçage. Cependant, comme dans les deux cas précédents, nous voyons apparaître une structure préférentielle avec un angle 45° .

Les trois différents cas présentés ici ont été obtenus pour différentes fréquences de libration longitudinale : $\omega = 0,1$, $\omega = 2,5$ et $\omega = 4,1$. Indépendamment de la fréquence du forçage, les ondes inertielles générées par l'écoulement turbulent mettent en évidence un pic dans le spectre temporel, localisé autour de $\omega \simeq 1,4 - 1,5$. Ainsi, nous rejoignons la section précédente, où nous avons vu que la fréquence préférentiellement excitée par un écoulement turbulent dans un

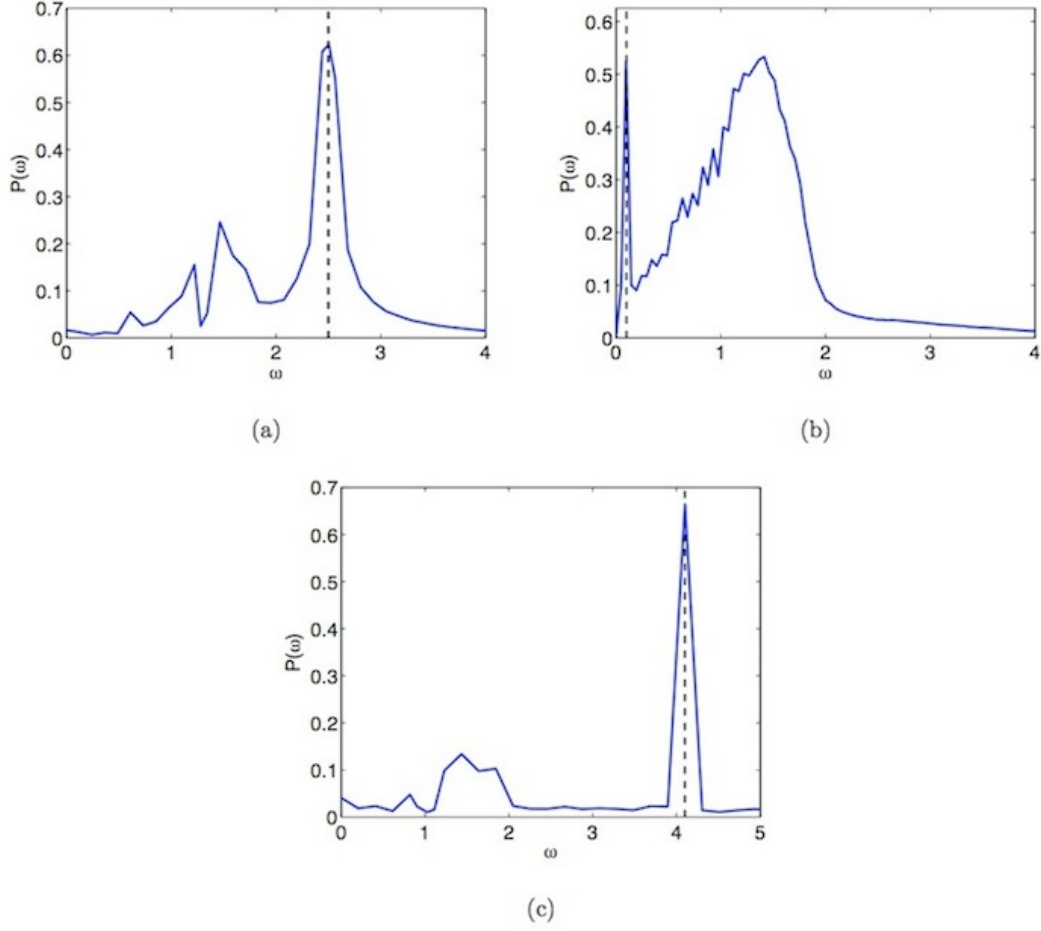


FIGURE 6.14 – Moyennes verticales des spectres temporels, pris en $r = 0,6$ correspondant aux situations présentées dans la figure 6.12, plus précisément pour (a) $\omega = 2,5$, (b) $\omega = 0,1$, (c) $\omega = 4,1$. Les lignes en tirets noirs indiquent dans chaque cas la fréquence de libration.

écoulement en rotation est équivalente à la fréquence observée dans le cas des ondes de gravité générées par turbulence (voir par exemple [Dohan & Sutherland, 2005](#)). La différence majeure est qu'ici, la fréquence préférentiellement excitée ne dépend pas de la coordonnée axiale z .

Contrairement au cas de la sphère, un paramètre géométrique peut être important dans le cas du cylindre : son rapport d'aspect. Pour s'assurer que les ondes inertielles générées spontanément par l'écoulement turbulent dans la couche visqueuse latérale ne dépendent pas de ce paramètre, nous avons effectué trois simulations numériques avec le même nombre d'Ekman, $E = \nu/\Omega_0 R^2 = 4 \times 10^{-5}$ et les mêmes fréquence et amplitude de libration $\omega = 2,1$ et $\varepsilon = 0,7$. Seule le rapport d'aspect $\alpha = H/R$ a été modifié. Le résultat de nos investigations est présenté en figure 6.15 et semble montrer que la hauteur du cylindre n'est pas un paramètre essentiel pour ce phénomène, du moment que α n'est pas trop petit pour générer une zone d'extension axiale suffisamment importante.

6.6 Conclusion

Pour résumer, ce chapitre présente la première preuve de la génération spontanée d'ondes inertielles à partir d'un écoulement turbulent généré par le système lui-même dans une sphère.

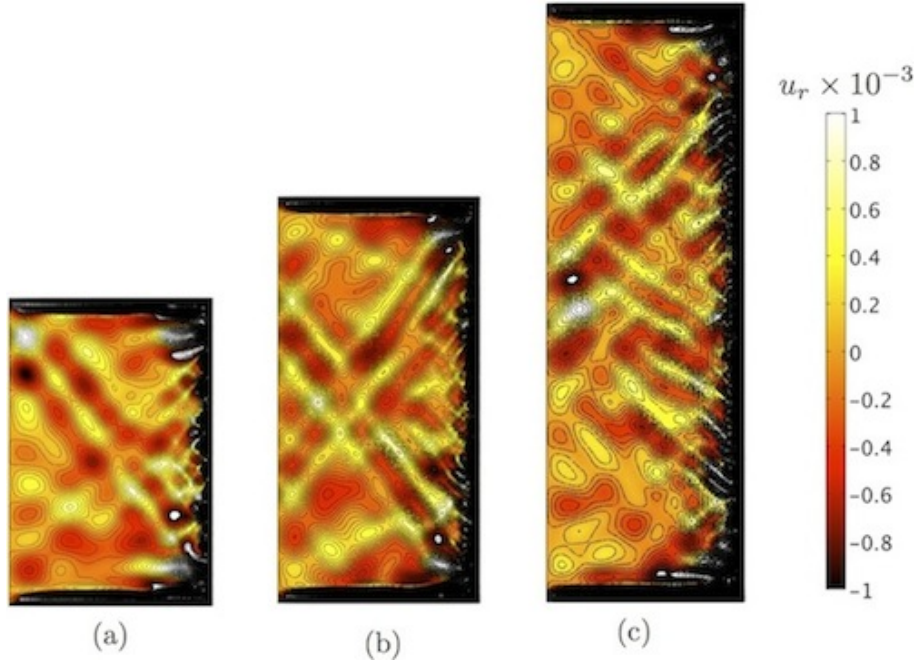


FIGURE 6.15 – Influence de la hauteur du cylindre sur la génération spontanée d’ondes inertielles. Les trois cas correspondent au même nombre d’Ekman, $E = \nu/\Omega_R R^2 = 4 \times 10^{-5}$, $\omega = 2,1$ et $\varepsilon = 0,7$. Seule la hauteur du cylindre change : (a) $\alpha = H/R = 1,5$, (b) $\alpha = H/R = 2$ et (c) $\alpha = H/R = 3$.

Ce mécanisme n’est pas limité à un conteneur oscillant autour de son axe, comme étudié ici, mais est susceptible de se produire de manière générique dans tout fluide en rotation en présence d’une zone turbulente localisée. Les simulations numériques que nous avons effectuées montrent que ces ondes inertielles sont générées à la fois dans des régimes où usuellement aucune onde inertielle ne se propage dans le volume ($|\omega| > 2$) et également dans le régime où les ondes inertielles sont directement excitées par le forçage harmonique ($\omega \in [-2; 2]$).

Nous avons également pu voir qu’une distinction doit être faite entre une zone turbulente localisée ou étendue dans l’espace, comme illustré par l’étude en géométrie sphérique et en géométrie cylindrique. Notons que la même distinction est présente dans le cas de la génération spontanée d’ondes internes : un panache localisé va générer des ondes internes de la même manière que le cas de la sphère présenté ici (Townsend, 1966), alors qu’une région turbulente étendue génère des ondes internes dont les caractéristiques sont équivalentes au cas du cylindre présenté ici (Taylor & Sarkar, 2007). La distinction entre ces deux régimes influence la structure spatiale du champ d’ondes généré. Mais, dans tout les cas, l’énergie associée aux ondes inertielles est concentrée autour de la fréquence préférentiellement excitée $\omega \sim 1,4 - 1,6$.

La caractérisation des ondes inertielles générées par ce mécanisme a été faite en utilisant un modèle numérique axisymétrique. Bien que ce modèle soit restrictif, il nous a permis de caractériser les structures spatiale et temporelle des ondes émises. Soulignons que le phénomène observé numériquement semble aussi pouvoir être observé expérimentalement comme illustré sur la figure 6.16. Ici, une sphère en rotation est soumise à un forçage de marées qui peut déstabiliser l’écoulement et générer un écoulement turbulent¹. Une visualisation par particules de Kalliroscope permet alors de mettre en évidence la présence de structures similaires à celles observées sur la figure 6.1. La fréquences des ondes inertielles forcées directement par ce forçage,

1. Nous donnerons plus de détails sur ce point dans le chapitre 7

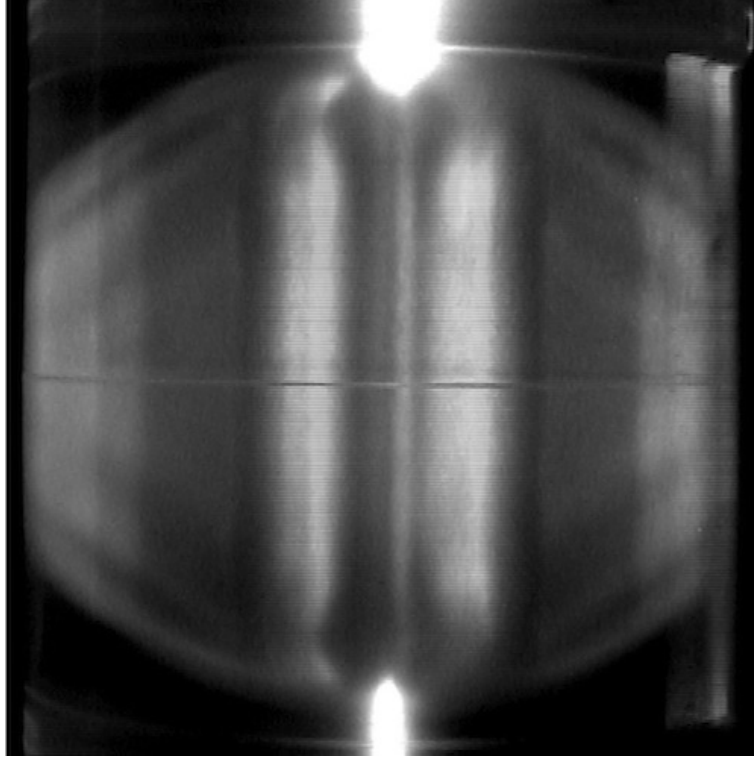


FIGURE 6.16 – Visualisation par particules de Kalliroscope des structures générées par un forçage de marées pour $\Omega_R = 0,307$, $E = 9,6 \times 10^{-6}$ et $\beta = 0,07$ (voir chapitre 7).

$\omega = 0,614$, induit des ondes inertielles émises depuis la latitude critique et faisant un angle $\theta \simeq 72^\circ$ avec l'axe de rotation. Ici, nous observons que les ondes semblent émises au voisinage de l'équateur, dans une zone turbulente et leur angle caractéristique est plus proche de 45° . Ceci suggère que ce mécanisme peut être observé et mesuré expérimentalement. Néanmoins, ces ondes sont de faibles amplitudes et leur caractérisation expérimentale demeure un grand challenge.

Pour conclure, soulignons que l'étude de ce phénomène dans les écoulements en rotation peut avoir des implications directes dans différents systèmes naturels, en particulier pour les corps astrophysiques qui sont habituellement modélisés comme des sphères ou des coquilles sphériques en rotation. En effet, la plupart des corps astrophysiques sont soumis à différents forçages harmoniques susceptibles de générer des ondes inertielles (Aldridge & Lumb, 1987; Kuhn *et al.*, 2000). Le mécanisme présenté dans cet chapitre est susceptible de se produire dans des corps célestes, car certains d'entre eux, comme Io ou Europe, sont supposés abriter un régime turbulent du fait du forçage de libration longitudinale (Noir *et al.*, 2009). Plus généralement, la génération spontanée présentée dans ce chapitre est un effet du premier ordre affectant tout fluide en rotation en présence d'une zone turbulente et constitue une bonne analogie directe entre fluide stratifié et fluide en rotation.

Quatrième partie

Dynamique en présence d'ondes inertiellles

Vent zonal et instabilités générés par résonance d'ondes inertielles

L'observation est l'investigation d'un phénomène naturel, et l'expérience est l'investigation d'un phénomène modifié par l'investigateur.

Claude Bernard

Sommaire du chapitre

7.1	Introduction	142
7.1.1	Déviati�n à l'écoulement théorique en géométrie cylindrique	142
7.1.2	Modes résonants en géométrie sphérique	146
7.1.3	études antérieures	147
7.2	Résonance de modes inertiels dans une sphère	149
7.2.1	Influence de la fréquence de forçage	149
7.2.2	Influence de l'amplitude de marées	152
7.2.3	Influence du nombre d'Ekman	155
7.3	Instabilité barotrope générée par les vents zonaux	158
7.3.1	Constatai�on expérimentale	158
7.3.2	Mesures quantitatives	159
7.3.3	Loi d'échelle	163
7.4	Vent zonal en présence d'un noyau interne	164
7.4.1	Modes inertiels dans la coquille	165
7.4.2	Visualisation des ondes inertielles	165
7.4.3	Instabilité de cisaillement	165
7.4.4	Perspectives	167
7.5	Conclusion	167

Jusqu'à maintenant, nous nous sommes placés dans des conditions telles qu'aucune onde inertielle n'était excitée dans le volume par forçage direct. Ainsi, nous avons pu proposer, au chapitre 3, une solution analytique permettant de décrire l'écoulement zonal en géométrie sphérique, avec ou sans noyau, dans le cas d'un forçage de libration longitudinale. Ce calcul analytique est en très bon accord avec les résultats expérimentaux et numériques décrits au chapitre 4. De plus, nous avons vu qu'il permet de retrouver le résultat de Wang (1970), fournissant l'écoulement zonal dans un cylindre. Néanmoins, le problème devient plus complexe dès lors que la fréquence de forçage permet d'exciter des ondes inertielles. Dans ce cas, la théorie développée précédemment ne peut plus s'appliquer *stricto sensu* car la couche d'Ekman diverge au niveau

des latitudes critiques. De plus le forçage peut, sous certaines conditions, exciter un mode propre du conteneur.

Dans ce chapitre, nous illustrons tout d'abord, en géométrie cylindrique, que l'écoulement zonal généré en présence de modes inertiels ne peut plus être décrit par l'étude analytique effectuée au chapitre 3. En pratique, bien qu'une contribution des couches limites visqueuses soit toujours présente, les modes inertiels génèrent également un écoulement non-linéaire dans le volume qui dépend maintenant du nombre d'Ekman. Pour pouvoir atteindre des nombres d'Ekman suffisamment faibles, tout en conservant une géométrie tridimensionnelle afin d'étudier la présence possible d'une instabilité, le recours à des expériences de laboratoire est nécessaire. Nous présentons, dans ce chapitre, les résultats expérimentaux relatifs à l'excitation d'ondes inertielles par un forçage harmonique, plus précisément par une déformation de marées dans une sphère en rotation. Nous mettons également en évidence qu'un écoulement zonal localisé est généré et que celui-ci peut se déstabiliser via une instabilité de cisaillement. Une telle instabilité est susceptible de se produire au sein de certains satellites ou planètes.

7.1 Introduction

7.1.1 Déviation à l'écoulement théorique en géométrie cylindrique

Nous avons vérifié au chapitre 4 que la théorie faiblement non-linéaire décrit correctement l'écoulement zonal généré par un forçage de libration longitudinale dans diverses géométries en l'absence d'ondes inertielles. Ceci a été illustré, dans le cas du cylindre, sur la figure 4.15 pour $\omega \ll 1$ ou $\omega > 2$. Par contre, pour des fréquences $\omega \in [0; 2]$, nous avons remarqué une déviation à la solution analytique qui a été supposée induite par l'influence des ondes inertielles dans le volume. Nous considérons de nouveau dans cette section des petites amplitudes de libration longitudinale de telle sorte que la couche visqueuse soit centrifuge stable, à l'inverse de la situation étudiée au chapitre 6. Les seules ondes inertielles présentes en volume sont donc excitées par le forçage direct.

Noir *et al.* (2010) ont mesuré expérimentalement l'écoulement généré, à une hauteur fixe $z = 0,22$, dans un cylindre de rapport d'aspect $R/(2H) = 1,0686$ pour une fréquence de libration longitudinale $\omega = 1$, une amplitude $\varepsilon = 0,4$ et un nombre d'Ekman $E = 10^{-4}$. Nous avons reporté leurs mesures expérimentales sur la figure 7.1(a) ainsi que la solution analytique et le résultat de la simulation numérique correspondant à ces paramètres.

Cette figure met en évidence que les mesures expérimentales et la solution numérique sont en très bon accord mais diffèrent toutes deux de la solution analytique. Ceci n'est pas surprenant, en effet pour $\omega = 1$ et $\alpha = 1,0686$, un mode inertiel résonant, dont la structure est visible sur la figure 7.1(c), est excité par le forçage de libration. La présence de ce mode modifie la structure spatiale de l'écoulement zonal qui dépend maintenant fortement de la coordonnée axiale comme illustré sur la figure 7.1(b). Pour pouvoir quantifier un tel écoulement zonal, nous introduisons une énergie cinétique moyenne par unité de masse associée à l'écoulement zonal dans le volume, définie par

$$E_{c,2} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon^2 r^2 \Omega_2^2 dV. \quad (7.1)$$

Le volume V a été choisi de telle sorte qu'il ne contienne pas les couches visqueuses proches des parois où Ω_2 varie fortement. Typiquement, pour un cylindre de rapport d'aspect $\alpha = 2$, nous avons considéré des volumes rectangulaires de taille allant de $r \times z = [0,5 \times 0,6]$ à $[0,8 \times 0,9]$ pour

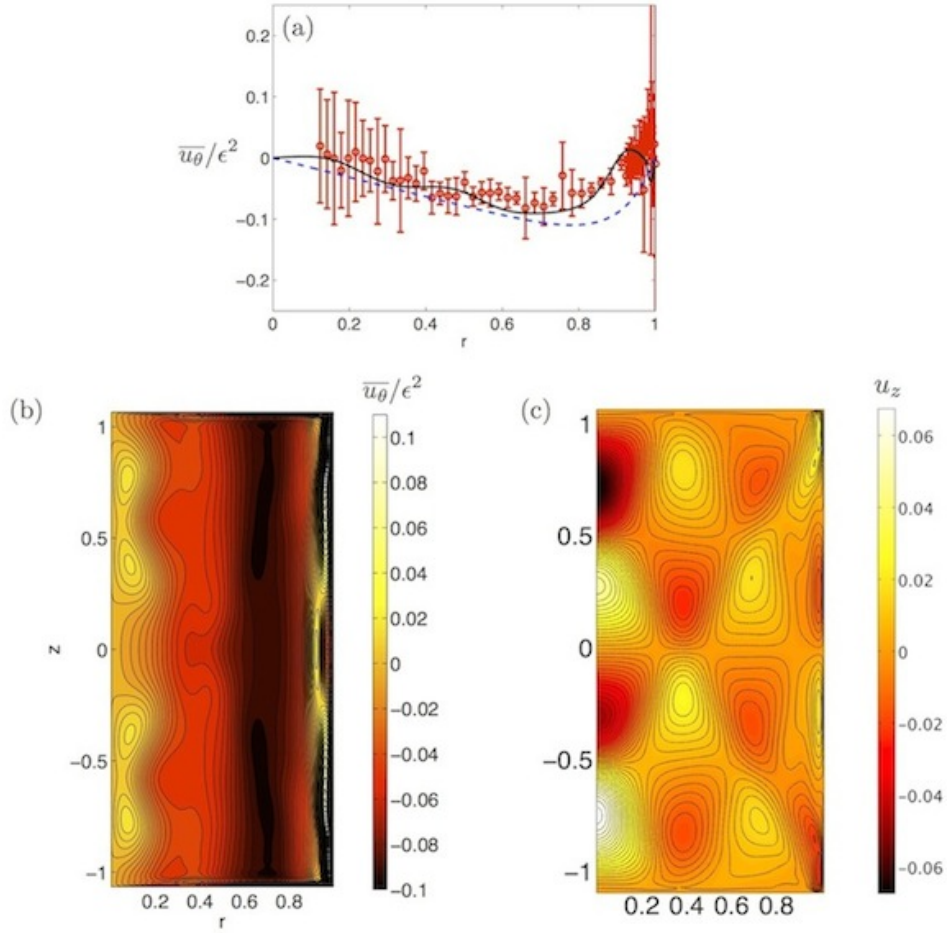


FIGURE 7.1 – Comparaison des profils de l'écoulement zonal obtenu expérimentalement, analytiquement et numériquement dans un cylindre de rapport d'aspect $R/(2H) = 1,0686$ pour $\varepsilon = 0,4$, $E = 10^{-4}$ et $\omega = 1$. (a) Écoulement zonal normalisé, $\overline{u_\theta}/\varepsilon^2$, en $z = 0,22$. Les points rouges avec les barres d'erreur sont les mesures expérimentales de Noir *et al.* (2010), la ligne noire continue est le résultat numérique et la ligne en tirets bleus est la prédiction théorique. (b) Contours de l'écoulement zonal $\overline{u_\theta}/\varepsilon^2$ dans le plan (r, z) . (c) Vitesse axiale instantanée au temps $t = 2\pi$.

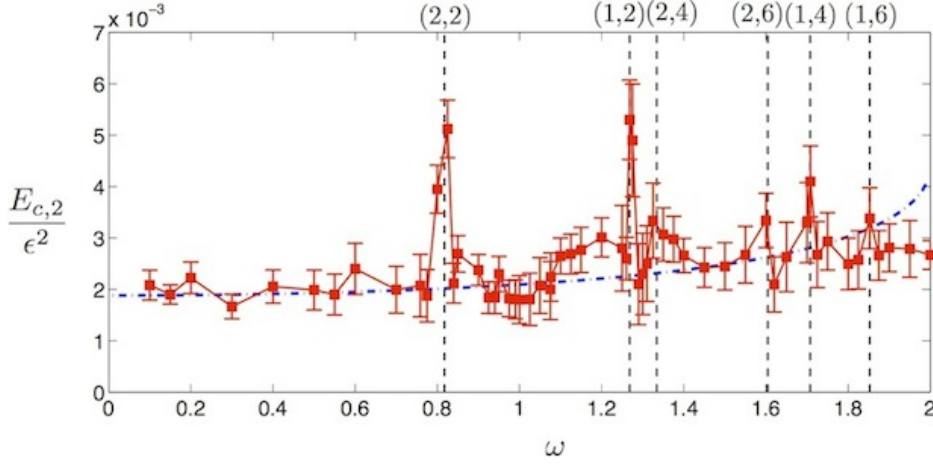


FIGURE 7.2 – Energie cinétique adimensionnée $E_{c,2}$ [définie par l'expression (7.1)] normalisée par ϵ^2 en fonction de la fréquence de libration ω pour $E = 5 \times 10^{-5}$, $\epsilon = 0,1$ et un cylindre de rapport d'aspect $\alpha = 2$. Les lignes verticales et les symboles (n,k) indiquent les fréquences et nombres d'onde des modes inertiels (voir le tableau 7.1). La courbe en tirets-pointillés noirs correspond à la prédiction analytique en négligeant l'influence des ondes inertielles.

obtenir une valeur moyenne de $E_{c,2}$ et estimer les barres d'incertitude. La variation de l'énergie cinétique moyenne associée à l'écoulement zonal est représentée sur la figure 7.2 en fonction de la fréquence de libration ω . Les barres d'incertitude estiment la variation de la valeur moyenne entre les différents volumes de contrôle.

Cette figure montre que les valeurs les plus importantes de $E_{c,2}$ sont localisées pour des fréquences de libration particulières. Nous avons pu vérifier que ces fréquences particulières correspondent aux fréquences de résonance dans un cylindre de rapport d'aspect $\alpha = 2$ comme utilisé dans les simulations numériques (voir le tableau 7.1). Les modes inertiels non-visqueux et axisymétriques sont définis par deux indices n et k correspondant respectivement aux nombres d'onde radial et axial. Notons que seules les fréquences associées avec un nombre pair de demi-longueurs d'onde axiale sont observées. Ceci est en accord avec la symétrie imposée par le forçage. En effet, la libration longitudinale induit un écoulement azimuthal qui est pair par rapport au plan équatorial ($z = 0$). Les modes avec un nombre impair de demi-longueur d'onde ont une vitesse azimuthale impaire et ne peuvent donc pas être forcés directement. Nous pouvons également remarquer que les pics de plus grandes amplitudes sont associés avec les nombres d'onde les plus petits et les fréquences correspondant à $n \geq 3$ ne sont pas visibles. En effet, la viscosité tend à amortir les modes à grand nombres d'onde, qui possèdent les plus petites échelles de longueur. Notons finalement que le comportement général de $E_{c,2}$ par rapport à ω suit la tendance donnée par la solution analytique qui néglige la présence de modes inertiels. Ce résultat suggère que l'écoulement zonal induit par les couches visqueuses, présenté au chapitre 3, est toujours présent et qu'une contribution des modes inertiels se rajoute à celui-ci.

L'effet des résonances sur $E_{c,2}$ est également visible quand on modifie le rapport d'aspect du cylindre en gardant constante la fréquence de libration ω . La figure 7.3 présente les variations de l'énergie cinétique associée à l'écoulement zonal en fonction du rapport d'aspect pour deux fréquences : $\omega = 0,1$ et $\omega = 1,27$. Pour $\omega = 0,1$, $E_{c,2}$ reste constante et égale à la prédiction théorique, en effet, aucun mode inertiel n'est excité pour les paramètres considérés. Pour $\omega = 1,27$, un pic bien défini est visible pour $\alpha = 2$, en accord avec l'excitation d'un mode inertiel de nombres

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$k = 1$	0,7586	0,4370	0,3052
$k = 2$	1,2681	0,8174	0,5901
$k = 3$	1,5518	1,1152	0,8406
$k = 4$	1,7075	1,3343	1,0509
$k = 5$	1,7975	1,4916	1,2222
$k = 6$	1,8527	1,6043	1,3592
$k = 7$	1,8886	1,6860	1,4680
$k = 8$	1,9130	1,7463	1,5544

TABLE 7.1 – Fréquences non-visqueuses des modes inertiels axisymétriques en fonction des nombres d'onde radial n et axial k pour un cylindre de rapport d'aspect $\alpha = 2$ (voir [Greenspan \(1968\)](#)).

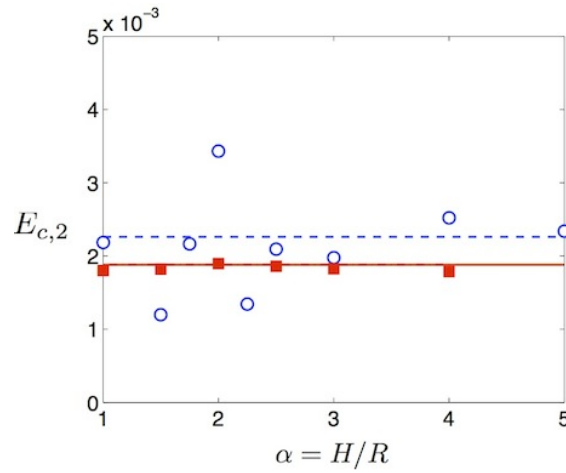


FIGURE 7.3 – Énergie cinétique associée à l'écoulement zonal pour $\omega = 0,1$ (carrés rouges) et $\omega = 1,27$ (cercles bleus) en fonction du rapport d'aspect du cylindre $\alpha = H/R$ avec $E = 5 \times 10^{-5}$ et $\varepsilon = 0,1$. La ligne rouge continue et la ligne en tirets bleus représentent les valeurs théoriques de l'énergie cinétique en l'absence d'ondes inertiels respectivement pour $\omega = 0,1$ ($E_{c,2} \simeq 1,88 \times 10^{-3}$) et $\omega = 1,27$ ($E_{c,2} \simeq 2,23 \times 10^{-3}$). La fréquence $\omega = 1,27$ correspond à la fréquence du mode (1,2) pour un cylindre de rapport d'aspect $\alpha = 2$ (voir table 7.1).

d'onde $(n,k) = (1,2)$ (voir table 7.1). L'excitation de ces modes est également responsable de la déviation à la théorie pour $\alpha = 4$. Il est intéressant de noter qu'un forçage résonant peut faire décroître l'énergie cinétique associée à l'écoulement zonal, dans notre volume de contrôle, comme observé pour $\alpha = 1,5$ et $\alpha = 2,2$ où les modes (3,4) et (2,2) sont respectivement excités.

Nous avons vu au chapitre 4, qu'en l'absence de modes inertiels, la vitesse angulaire associée au vent zonal, Ω_2 , est constante dans le volume en géométrie cylindrique. Mais, lorsqu'un mode inertiel est excité ce n'est plus le cas, comme illustré sur la figure 7.1(b). La structure radiale de la vitesse angulaire Ω_2 , à une position axiale donnée, est illustrée sur les figure 7.4(a) et 7.4(b) quand le mode $(n,k) = (2,1)$ est excité. Sur cette figure, les effets de la variation du nombre d'Ekman (figure 7.4(a)) et de l'amplitude de libration (figure 7.4(b)) sont analysés. Une dépendance claire avec le nombre d'Ekman est visible au voisinage de l'axe. Cette dépendance n'est pas associée à une correction visqueuse de la fréquence du mode résonant car les corrections

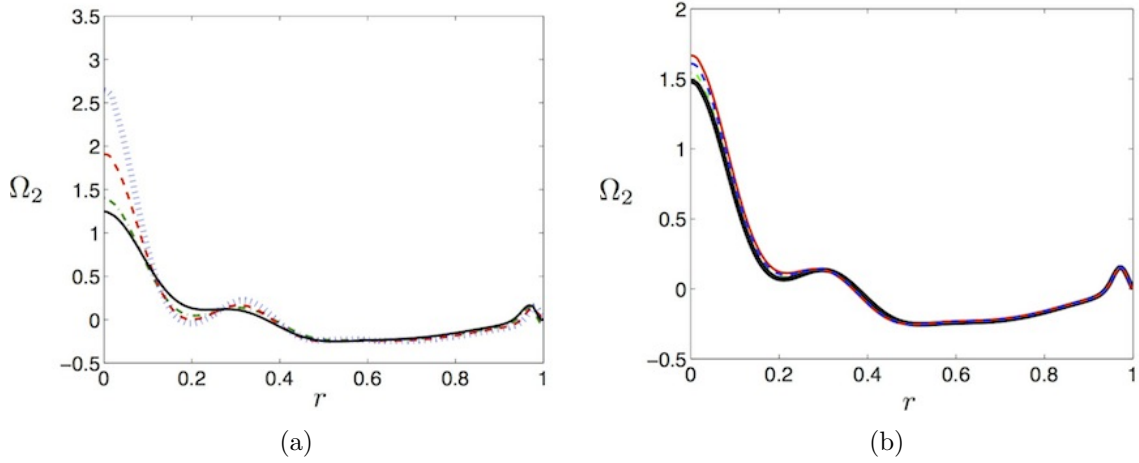


FIGURE 7.4 – Vitesse angulaire associée à l'écoulement zonal, $\Omega_2 = \overline{u_\theta}/(r \varepsilon^2)$, dans un cylindre de rapport d'aspect $\alpha = 2$ pour $\omega = 1,27$, (a) avec $\varepsilon = 0,05$ et différentes valeurs du nombre d'Ekman : $E = 10^{-4}$ (courbe noire continue), $E = 8 \times 10^{-5}$ (courbe tirets-pointillés verts), $E = 6 \times 10^{-5}$ (courbe en tirets rouges), $E = 4 \times 10^{-5}$ (courbe en pointillés bleus); (b) pour $E = 8 \times 10^{-5}$ et différentes amplitudes de libration : $\varepsilon = 0,1$ (courbe noire en gras), $\varepsilon = 0,08$ (courbe tirets-pointillés verts), $\varepsilon = 0,02$ (courbe en tirets bleus), $\varepsilon = 0,01$ (courbe rouge continue).

sont négligeables pour le nombre d'Ekman que nous avons considéré (Wedemeyer, 1964). Au lieu de ça, nous pensons que ces effets sont induits par des interactions non-linéaires présentes dans la région proche de l'axe et où les zones de cisaillement visqueuses émises depuis les coins se rencontrent.

Comme l'amplitude des zones de cisaillement internes dépend du nombre d'Ekman, il n'est pas surprenant d'observer que l'amplitude de l'écoulement zonal augmente quand on diminue le nombre d'Ekman. Malheureusement, la gamme de fréquences accessible dans nos simulations numériques est assez limitée et ne nous permet pas de donner une loi d'échelle pertinente pour le vent zonal. Par contre, nous observons sur la figure 7.4(b) que l'écoulement zonal reste proportionnel au carré de l'amplitude du forçage ε^2 , même en présence de modes inertiels. Nous suspectons que la légère différence qui apparaît au voisinage de l'axe est induite par les effets non-linéaires.

Pour étudier des nombres d'Ekman plus faibles et une situation tridimensionnelle, nous allons mener des expériences de forçages de marées dans une sphère en rotation.

7.1.2 Modes résonants en géométrie sphérique

L'exemple présenté ci-dessus illustre l'importance des modes inertiels sur l'écoulement zonal qui présente maintenant une dépendance avec le nombre d'Ekman. Ainsi, quand $E \rightarrow 0$, l'écoulement zonal pourrait devenir non-négligeable. Ce comportement est particulièrement intéressant pour les applications planétaires où les nombres d'Ekman sont très faibles. Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous placer en géométrie sphérique, qui est usuelle pour décrire les planètes et satellites. Le dispositif expérimental, présenté au chapitre 2 et utilisé dans le cadre d'un forçage de libration longitudinale au chapitre 4, ne permet pas d'atteindre des fréquences de libration suffisantes pour exciter de manière contrôlée les modes propres axisymétriques ($m = 0$) de la sphère. Par contre, ce dispositif expérimental a été initialement pensé pour étudier l'effet d'une déformation elliptique, c'est-à-dire un forçage de fréquence azimutale $m = 2$. La déforma-

tion, induite par les rouleaux en rotation à la vitesse angulaire Ω_{orb} , permet d'exciter un mode inertiel $m = 2$ de fréquence ω_{mode} en ajustant la vitesse angulaire orbitale de telle sorte que

$$\frac{\Omega_{orb}}{\Omega_{spin}} = \frac{\omega_{mode}}{2} \quad (7.2)$$

où Ω_{spin} est la vitesse angulaire de la sphère, qui est contrôlée de manière totalement indépendante des rouleaux. Notons que le facteur 2 provient du fait que la déformation elliptique est de fréquence azimutale $m = 2$ et excite donc deux fois un mode à chaque rotation. Nous pouvons alors reprendre le diagramme des modes propres de la sphère pour $m = 2$ (figure 1.8(c)) et expliciter ces résultats en fonction du paramètre sans dimension :

$$\Omega_R = \frac{\Omega_{orb}}{\Omega_{spin}} \quad (7.3)$$

qui représente la vitesse angulaire de rotation de la déformation, adimensionnée par la vitesse angulaire de la sphère. Le diagramme résultant est présenté en figure 7.5(a). Les champs de pression correspondant aux trois modes propres que nous verrons dans la suite sont présentés en figure 7.5(b), 7.5(c) et 7.5(d).

7.1.3 Études antérieures

L'étude expérimentale présentée dans ce chapitre prend pour origine une étude numérique menée par Tilgner (2007) (voir également Maas, 2001). Celui-ci a considéré l'effet d'un forçage de modes $m = 2$, i.e. un forçage de marées, dans une coquille sphérique en rotation. Pour étudier ce phénomène, des modes inertiels linéaires sont injectés dans une coquille sphérique en rotation (voir chapitre 1) :

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{u}_1 e^{i(\omega t + 2\phi)}\} \quad (7.4)$$

L'interaction non-linéaire de ces modes génère alors un écoulement axisymétrique ($m = 0$). Notons que dans son étude, Tilgner considère des conditions de glissement aux parois, par conséquent aucun écoulement zonal n'est généré par le mécanisme décrit aux chapitres 3 et 4. Seuls les modes inertiels peuvent générer ici un écoulement zonal. Un exemple d'écoulement non-linéaire généré pour un mode particulier, $\omega = 0,88$, un nombre d'Ekman $E = 10^{-6}$ et un rapport d'aspect $R_{int}/R_{ext} = 0,2$ est représenté sur la figure 7.6(a). Des bandes de cisaillement sont visibles dans le volume et s'ajoutent à un écoulement géostrophique, invariant suivant la direction axiale z . Tilgner a alors étudié l'influence de la taille du noyau sur l'écoulement zonal pour ce mode particulier, $\omega = 0,88$, en fonction du nombre d'Ekman. Ces résultats sont présentés sur la figure 7.6(b) et suggèrent que la taille du noyau influe sur la variation du vent zonal avec le nombre d'Ekman. Pour de petites tailles de noyaux (0,01, 0,03), l'amplitude de l'écoulement zonal sature très tôt et devient indépendante du nombre d'Ekman (pour $E \leq 2 \times 10^{-5}$). Alors que pour des tailles de noyau plus conséquentes, l'amplitude du vent zonal augmente fortement quand le nombre d'Ekman devient plus petit. Tilgner a également étudié la divergence de ce vent zonal pour différents modes. Ces résultats sont reportés en figure 7.6(c) et suggèrent que tous les modes dans la coquille divergent quand E devient petit, si la taille du noyau est suffisante. Notons toutefois que la valeur du nombre d'Ekman nécessaire pour obtenir un régime asymptotique diffère selon le mode. Par exemple pour le mode $\omega = -0,23$, un régime asymptotique est déjà présent à $E = 10^{-4}$ alors que pour un mode $\omega = -0,80$, le régime asymptotique n'est présent qu'à partir de $E = 10^{-6}$. Tilgner a également suggéré que ces écoulements zonaux pourraient générer des écoulements de l'ordre de 15 m.s^{-1} sur Jupiter du fait des marées générées par son satellite Io. Nous reviendrons sur ces applications astrophysiques dans la fin du chapitre.

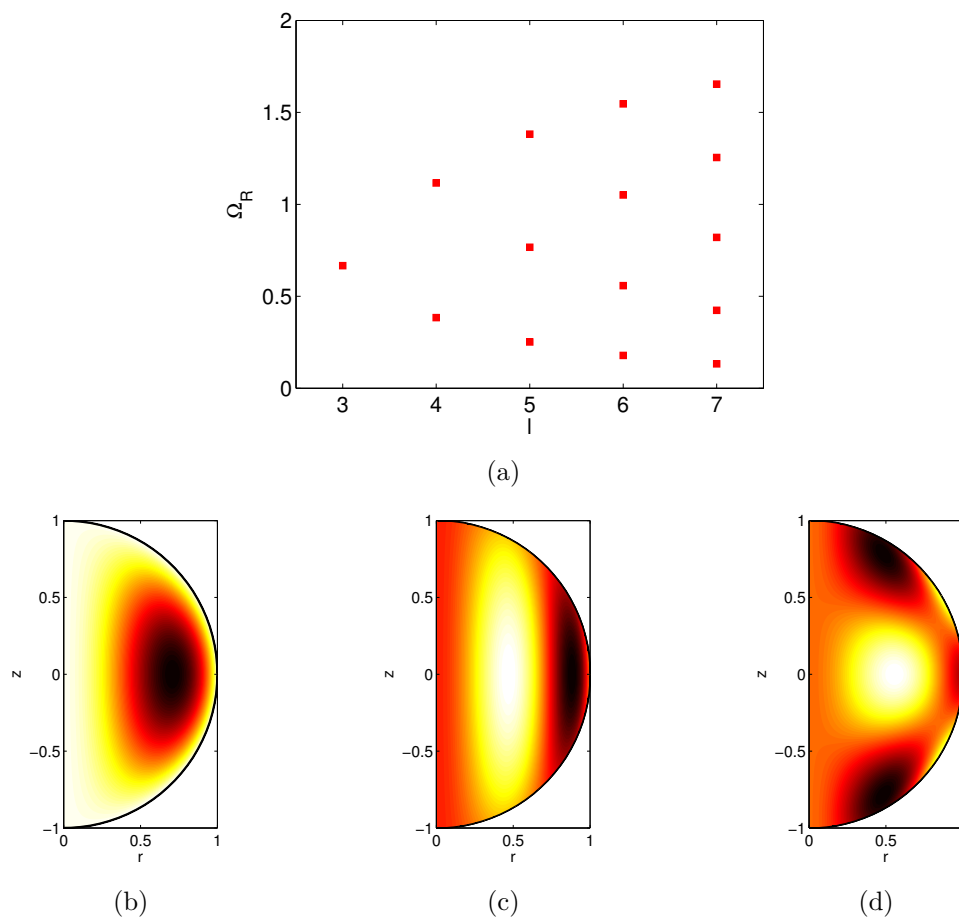


FIGURE 7.5 – (a) Valeurs de Ω_R associées aux modes propres de la sphère soumise à un forçage $m = 2$ en fonction du degré du polynôme de Legendre l . Champ de pression associé au mode propre (b) $\Omega_R = 0,3841$ ($l = 4$), (c) $\Omega_R = 0,1782$ ($l = 6$) et (d) $\Omega_R = 0,5578$ ($l = 6$) dans une sphère en rotation soumise à un forçage de marées ($m = 2$).

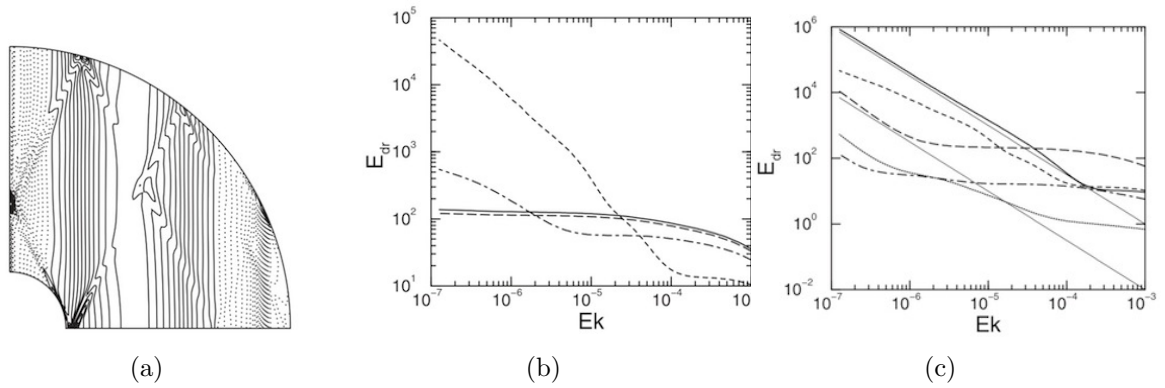


FIGURE 7.6 – (a) Contour du vent zonal généré $u_{\phi,2}$ pour $\omega = 0,88$ et $E = 10^{-6}$ dans une coquille sphérique de rapport d’aspect $R_{int}/R_{ext} = 0,2$. Energie cinétique E_{dr} associée à l’écoulement zonal $u_{\phi,2}$ en fonction du nombre d’Ekman (b) pour le mode $\omega = 0,88$ et différents rapport d’aspect R_{int}/R_{ext} (indiqués sur les courbes) et (c) pour $R_{int}/R_{ext} = 0,2$ et différents modes de fréquence ω (indiquées sur les courbes). La droite en trait fin représente une variation en $E_{dr}^{-3/2}$ (Figures extraites de [Tilgner \(2007\)](#)).

Une telle étude numérique, effectuée dans la limite asymptotique des petites amplitudes de forçage et avec des conditions aux limites de glissement à la paroi appelle une validation expérimentale. Ce travail a été commencé par [Morize et al. \(2010\)](#) qui ont pu montrer qu’un écoulement intense est généré pour des modes propres de la sphère via un mécanisme non-linéaire. Cependant, la loi d’échelle obtenue expérimentalement suggère une variation de l’écoulement zonal en $E^{-3/10}$ ainsi qu’une saturation, attribuée à l’absence d’un noyau interne, rejoignant les propos de [Tilgner \(2007\)](#). Dans la suite nous allons revenir sur cette expérience et compléter ces résultats. Nous montrerons que la loi d’échelle obtenue expérimentalement pour un mode particulier est en fait légèrement différente et dépend du mode résonant considéré. De plus, la saturation observée expérimentalement s’explique par la présence d’une instabilité de cisaillement pouvant conduire à un régime turbulent. La présence d’un écoulement turbulent généré par le système sous l’effet d’un forçage pourrait avoir des conséquences intéressantes pour les applications astrophysiques, par exemple pour expliquer la présence d’un champ magnétique sur certains satellites joviens.

7.2 Résonance de modes inertiels dans une sphère

7.2.1 Influence de la fréquence de forçage

Dans un premier temps, nous pouvons étudier l’influence de la fréquence de forçage Ω_R sur l’écoulement zonal généré dans la sphère. Ce travail a déjà été effectué quantitativement par [Morize et al. \(2010\)](#) (voir la figure 7.7). Néanmoins, nous prenons le temps de vérifier ici ces résultats, avant d’étudier l’influence de l’amplitude de forçage, du nombre d’Ekman et de considérer la présence d’un noyau interne dans la dernière partie de ce chapitre. Pour ce faire, nous utilisons une visualisation qualitative de l’écoulement à l’aide de particules de Kalliroscope (voir section 2.2.4.1). En l’absence de mode résonant, l’amplitude de l’écoulement zonal généré ne présente pas de grandes variations avec la distance au centre de la sphère et nous observons un fond noir quasi-uniforme, synonyme d’un écoulement proche d’une rotation solide dans le volume. En pratique, un écoulement zonal faible est généré par les couches limites suivant le mécanisme présenté aux chapitres 3 et 4 dans le cas d’un forçage de libration longitudinale. Par

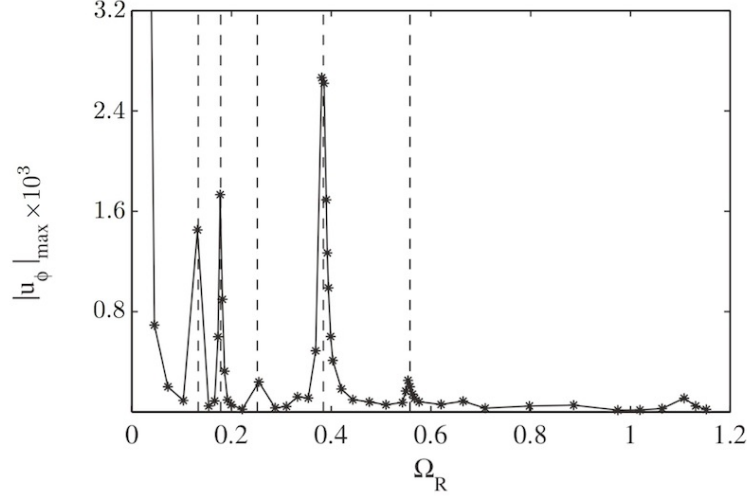


FIGURE 7.7 – Maximum de la norme de la vitesse azimutale du vent zonal adimensionnée, $|u_\phi|_{\max}$ pour $\beta = 0,04$ et $E = 9,46 \times 10^{-6}$ en fonction de Ω_R . Les lignes verticales en pointillés représentent des fréquences de résonance de modes $m = 2$ dans une sphère (extrait de [Morize et al. \(2010\)](#)).

contre, pour des valeurs de $\Omega_R = \Omega_{orb}/\Omega_{spin}$ bien choisies, nous voyons apparaître des bandes verticales qui sont la signature d'une structure plus complexe de l'écoulement et qui traduisent la présence d'un mode résonant. Par exemple, pour une amplitude de forçage $\beta = 0,04$ et un nombre d'Ekman $E = 1,45 \times 10^{-5}$, nous voyons apparaître trois valeurs particulières de Ω_R : $\Omega_R \simeq 0,178$, $\Omega_R \simeq 0,384$ et $\Omega_R \simeq 0,55$, présentées respectivement sur les figures 7.8(a), 7.8(b) et 7.8(c). Ces valeurs correspondent bien à des modes résonants théoriques pour un forçage $m = 2$ dans la sphère (voir figure 7.5).

Nous avons étudié, de manière systématique, l'influence de Ω_R . Pour cela nous reportons le gradient de l'intensité lumineuse, mesurée sur nos photographies. En présence d'un mode résonant, des bandes de cisaillement lumineuses apparaissent et la valeur de ce gradient augmente en conséquent. La figure 7.8(d) présente le résultat de cette investigation. Nous voyons apparaître un pic important pour $\Omega_R = \Omega_{orb}/\Omega_{spin}$ petit. Dans cette région, l'instabilité elliptique se développe pour les paramètres considérés. Ce que nous mesurons n'est donc pas la trace d'un mode résonant mais d'une instabilité. Par contre, les trois pics observés pour des valeurs plus importantes de Ω_R , correspondant aux images 7.8(a), 7.8(b), 7.8(c) et sont clairement la signature des modes résonants. Ce sont les seuls modes que nous pouvons visualiser avec des particules de Kalliroscope dans la sphère pour un forçage de marées avec les paramètres $E = 1,45 \times 10^{-5}$ et $\beta = 0,04$. En rapprochant ces résultats de la relation de dispersion présentée en figure 7.5(a), il apparaît que les modes visualisés sont ceux correspondant à une valeur de l paire, c'est-à-dire à un mode symétrique par rapport à l'équateur. Comme dans le cas de la libration dans le cylindre, présenté ci-dessus en section 7.1.1, le forçage présente une symétrie par rapport à l'équateur qui implique la même symétrie pour les modes résonants. Il est donc normal de ne pas pouvoir exciter les modes dont la valeur du nombre d'onde axiale est impair. De plus, seuls les modes pour $l \leq 6$ sont excités. Ceci n'est également pas surprenant : les modes de plus grandes valeurs de l correspondent à des structures de taille plus faible. Ces modes sont donc plus facilement amortis par les effets visqueux et il est plus difficile de les visualiser pour un nombre d'Ekman modéré ($E = 1,45 \times 10^{-5}$). En résumé, cette étude préliminaire confirme que les modes que nous observons sont bien ceux mesurés quantitativement par [Morize et al. \(2010\)](#). Notons qu'avec des

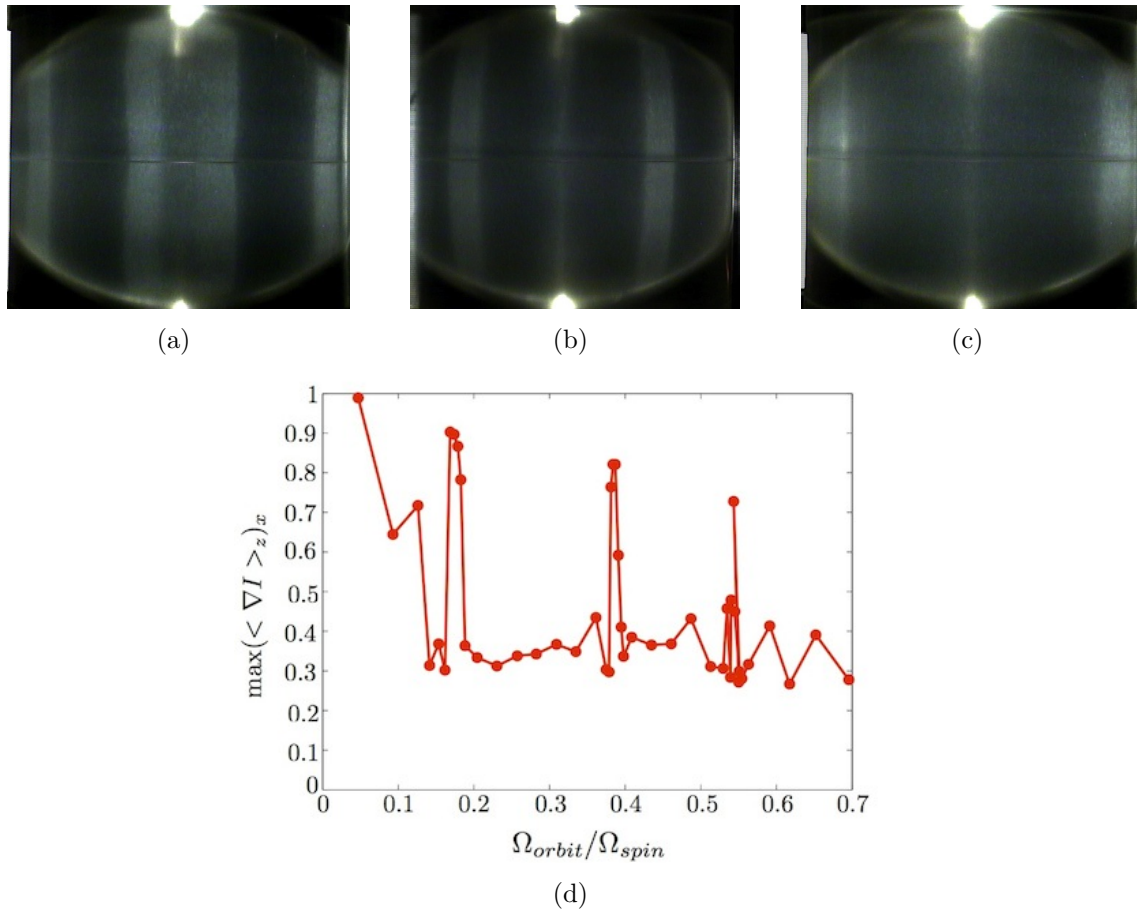


FIGURE 7.8 – Détermination des modes résonants par visualisation directe (particules de Kalliroscope) pour $E = 1,45 \times 10^{-5}$, $\beta = 0,04$ et (a) $\Omega_R = 0,178$, (b) $\Omega_R = 0,384$ et (c) $\Omega_R = 0,55$. (d) Gradient d'intensité lumineuse en fonction de Ω_R pour $E = 1,45 \times 10^{-5}$ et $\beta = 0,04$.

mesures quantitatives par PIV et une valeur du nombre d'Ekman plus faible ($E = 9,46 \times 10^{-6}$), ceux-ci ont pu mettre en évidence deux autres modes résonants correspondant à $l = 8$. Il est probable que les structures associées à ces modes soient trop complexes pour observer une trace bien nette avec une visualisation par particules de Kalliroscope.

Dans la suite, afin de quantifier l'influence de l'amplitude de marées et du nombre d'Ekman de l'écoulement, nous allons effectuer des mesures PIV du champ des vitesses à l'aide d'une caméra placée dans le référentiel en rotation avec la sphère. Cette méthode a été détaillée au chapitre 2 et est similaire à la méthode suivie par [Morize et al. \(2010\)](#). La seule différence est que nous capturons 24 images par seconde puis nous prenons la moyenne temporelle du champ obtenu sur un grand nombre de rotations (typiquement entre 60 et 100), alors que [Morize et al. \(2010\)](#) enregistraient une image par rotation. Comme la déformation tourne à une vitesse différente de la caméra, effectuer une moyenne temporelle des champs de vitesses est équivalent à prendre la moyenne azimutale pour différentes positions de la déformation. Nous pouvons ainsi remonter à l'écoulement zonal généré. Des exemples de champs PIV obtenus sont présentés sur la figure 7.9(a) pour $\Omega_R = 0,178$ et sur la figure 7.9(b) pour $\Omega_R = 0,384$. Notons que la réfraction induite par les interfaces air-silicone et silicone-eau conduisent à la présence d'une zone d'ombre pour $r > 85$ mm où nous ne pouvons pas mesurer le champ des vitesses. De plus, même si une correction optique a été prise en compte, la précision de nos mesures sera moindre pour les grandes valeurs de r car les effets de réfraction y sont bien plus importants. Les champs obtenus illustrent clairement la présence de bandes de cisaillement dans le volume. Avec ces champs PIV, nous pouvons alors obtenir les profils de vitesse azimutale suivant la coordonnée radiale qui sont présentés en figure 7.9(c) et 7.9(d). Nous allons quantifier dans la suite l'amplitude de cet écoulement en fonction des paramètres β et E .

7.2.2 Influence de l'amplitude de marées

Nous nous intéressons dans cette section à l'influence de la déformation elliptique β , c'est-à-dire de la force de marées exercée sur une planète en rotation par son satellite. Dans cette série d'expériences nous avons conservé le nombre d'Ekman, E , constant et égal à $E = 9,46 \times 10^{-6}$. Notre dispositif expérimental nous permet d'étudier $\beta \in [0,02; 0,09]$ avec une précision de $\pm 0,005$. Nous nous sommes concentrés ici sur le mode $\Omega_R = 0,384$ qui est celui dont l'écoulement zonal présente la plus forte amplitude des trois modes que nous pouvons exciter dans notre système. Ainsi, l'erreur relative dans l'estimation de l'amplitude de l'écoulement zonal généré est plus faible. Nous avons reporté sur la figure 7.10(a), les profils de la vitesse azimutale de l'écoulement zonal adimensionnée : $u_\phi = \langle U_\phi \rangle / (\Omega_{spin} R)$ où $\langle U_\phi \rangle$ est la vitesse obtenue par PIV en effectuant la moyenne du champ des vitesses sur un grand nombre de rotations (typiquement de l'ordre de 70 rotations). La première observation que nous pouvons faire est que l'amplitude de l'écoulement zonal varie fortement avec l'amplitude de forçage. Partant d'un forçage d'amplitude faible, $\beta = 0,025$, nous augmentons sa valeur et voyons des profils, de formes similaires, jusqu'à $\beta = 0,045$. Par contre, pour $\beta = 0,055$, le profil de vitesse associé à l'écoulement zonal semble différent, ce qui n'a pas été discuté dans l'étude précédente de [Morize et al. \(2010\)](#). En particulier, l'amplitude du vent zonal ne semble pas varier fortement entre les excentricités $\beta = 0,045$ et $\beta = 0,055$ ce qui peut paraître surprenant. En continuant d'augmenter l'amplitude de forçage, le profil de l'écoulement zonal reste similaire au profil observé pour $\beta = 0,055$ mais son amplitude augmente. Et finalement, pour la plus forte amplitude de déformation que nous pouvons étudier dans notre système expérimentale, le profil obtenu est totalement différent ($\beta = 0,085$).

Pour quantifier cette variation, nous mesurons le maximum de la vitesse azimutale de l'écou-

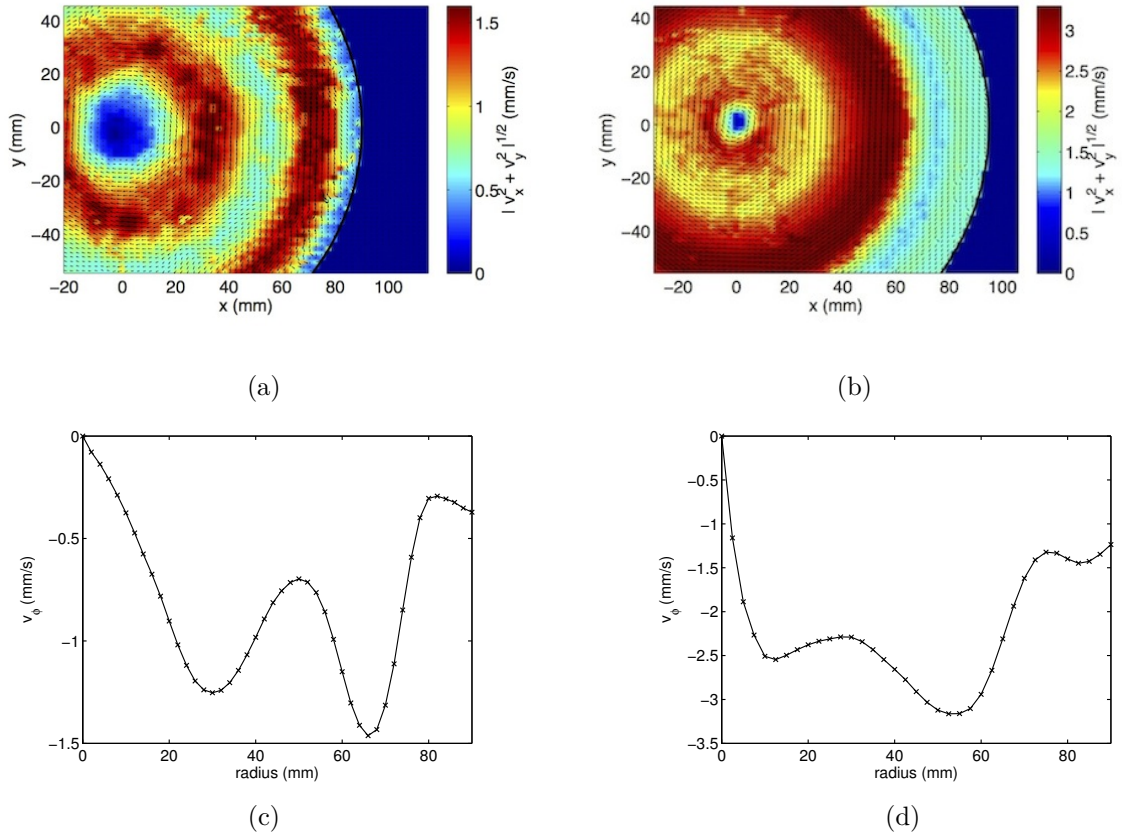


FIGURE 7.9 – Champs de vitesses obtenus par mesures PIV dans le plan équatorial pour $\beta = 0,045$ et (a) $E = 1,4 \times 10^{-5}$, $\Omega_R = 0,178$ et (b) $E = 1,25 \times 10^{-5}$, $\Omega_R = 0,384$. Le centre de la sphère est en (0,0). (c) et (d) sont respectivement les profils de vitesse azimutale en fonction du rayon pour les champs PIV (a) et (b).

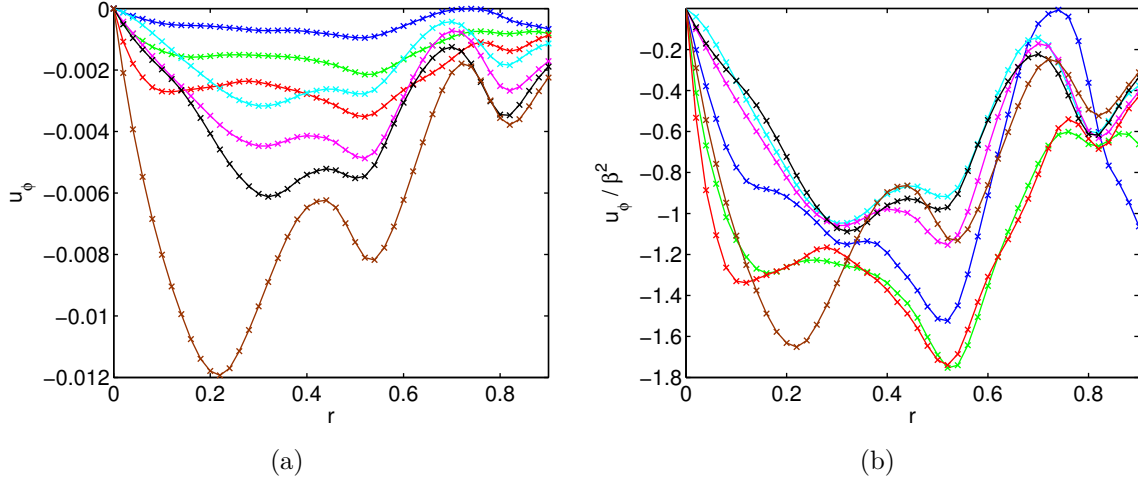


FIGURE 7.10 – (a) Vitesse azimutale de l'écoulement zonal adimensionnée, u_ϕ , pour $E = 9,46 \times 10^{-6}$, $\Omega_R = 0,384$ et différentes excentricités : $\beta = 0,025$ (bleu), $\beta = 0,035$ (vert), $\beta = 0,045$ (rouge), $\beta = 0,055$ (cyan), $\beta = 0,065$ (magenta), $\beta = 0,075$ (noir), $\beta = 0,085$ (marron). (b) Mêmes profils de vitesse mais renormalisés par β^2 .

lement zonal adimensionnée en fonction de l'amplitude du forçage β . Ces résultats sont présentés sur la figure 7.11, ainsi qu'une droite de pente β^2 , qui est la variation attendue pour un effet non-linéaire. Nous remarquons que pour les valeurs de $\beta < 0,05$, une variation en β^2 est visible, en accord avec les mesures qui avaient été effectuées par Morize *et al.* (2010). L'écoulement zonal généré par le forçage de marées est bien un effet non-linéaire, comme dans le cas de la libration ou de la précession (Busse, 1968b; Noir *et al.*, 2001). Par contre, pour le nombre d'Ekman et le mode considéré ici, cette amplitude ne varie pas ou peu, entre $\beta = 0,045$ et $\beta = 0,055$. Puis, l'amplitude de l'écoulement zonal présente de nouveau une dépendance non-linéaire en β^2 pour $\beta \geq 0,055$. Ainsi, l'écoulement zonal mesuré confirme bien que le mécanisme responsable de l'écoulement zonal est non-linéaire, mais un phénomène non discuté par Morize *et al.* (2010) semble présent et modifie l'amplitude de l'écoulement zonal, ici pour $\beta \sim 0,05$.

Nous pouvons alors tracer les profils de la vitesse azimutale renormalisée par β^2 afin de caractériser cette transition. Ces profils sont représentés en figure 7.10(b). Les profils pour les petites valeurs de β ($\beta = [0,025; 0,035; 0,045]$) se superposent correctement (notons que le profil tracé pour $\beta = 0,025$ est celui qui comporte la plus grande incertitude expérimentale du fait de la faible amplitude du forçage). Par contre, le phénomène observé entre $\beta = 0,045$ et $\beta = 0,055$ est clairement visible sur les profils renormalisés. Alors que ces profils pour $\beta = [0,055; 0,065; 0,075]$ se superposent très bien, tous trois sont clairement différents des profils observés pour les plus faibles valeurs de β .

Nous pouvons alors nous interroger sur le changement de forme du profil de vitesse azimutale qui, selon les études précédentes, devrait rester similaire. Pour mieux comprendre ce phénomène, nous effectuons des visualisations par particules de Kalliroscope. Les figures 7.12(a) et 7.12(b) montrent l'écoulement observé dans un plan méridional coïncidant avec l'axe de rotation pour le même nombre d'Ekman, $E = 1,42 \times 10^{-5}$, la même fréquence de forçage, $\Omega_R = 0,384$, mais deux amplitudes de forçage différentes, respectivement $\beta = 0,03$ et $\beta = 0,05$. La structure de l'écoulement apparaît ici différente. Pour la plus faible amplitude de forçages, la bande lumineuse est verticale et régulière, alors qu'en augmentant l'amplitude de forçage un écoulement plus

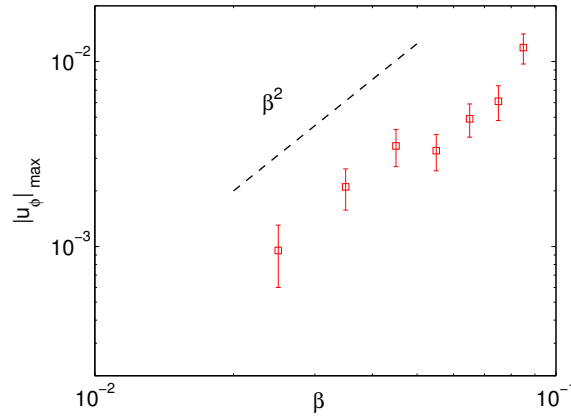


FIGURE 7.11 – Maximum de la norme de la vitesse azimutale du vent zonal adimensionnée, $|u_\phi|_{\max}$ en fonction de l'excentricité β pour $E = 9,46 \times 10^{-6}$ et $\Omega_R = 0,384$. La droite en tirets représente une variation en β^2 .

complexe est présent. L'expérience montre qu'une instabilité semble se développer et serait donc susceptible de modifier l'écoulement zonal mesuré. Nous reviendrons sur ce point dans la suite.

7.2.3 Influence du nombre d'Ekman

Nous venons de montrer que l'amplitude de l'écoulement zonal est non-linéaire, il varie en β^2 . Nous pouvons maintenant étudier la dépendance de cet écoulement avec le nombre d'Ekman. En effet, pour les planètes et satellites, le nombre d'Ekman est très petit, typiquement $E < 10^{-12}$. Nous avons considéré dans cette section les deux modes résonants les plus simples à exciter dans notre dispositif expérimental : $\Omega_R = 0,178$ et $\Omega_R = 0,384$. Les profils de vitesse azimutale obtenus expérimentalement sont présentés en figure 7.13(a) et 7.13(b). Sur ces figures, l'amplitude de la déformation elliptique est gardée constante et égale à $\beta = 0,045$. La première remarque que nous pouvons faire est que, contrairement au cas présenté aux chapitres 3 et 4, l'écoulement zonal montre clairement une dépendance avec le nombre d'Ekman. L'amplitude de celui-ci augmente lorsqu'on diminue le nombre d'Ekman, en accord avec les mesures antérieures de Morize *et al.* (2010). De plus, nous pouvons voir que la forme du profil semble changer pour une valeur de Ekman donnée : entre $E = 1,2 \times 10^{-5}$ et $E = 8,5 \times 10^{-6}$ pour le mode $\Omega_R = 0,178$ présenté sur la figure 7.13(a) et entre $E = 1,22 \times 10^{-5}$ et $E = 9,83 \times 10^{-6}$ pour le mode $\Omega_R = 0,384$ présenté sur la figure 7.13(b).

Afin de déterminer plus précisément la variation de l'amplitude de l'écoulement zonal en fonction du nombre d'Ekman, nous adoptons une méthode similaire à celle de Morize *et al.* (2010). Nous mesurons le maximum de la norme de la vitesse azimutale du vent zonal adimensionnée, $|u_\phi|_{\max}$ pour le mode à $\Omega_R = 0,384$. Par contre, le mode pour $\Omega_R = 0,178$ est plus complexe à quantifier. En effet, la figure 7.13(a) montre que la position radiale où la norme de la vitesse azimutale adimensionnée est maximum (en amplitude) dépend de la position. Pour des petits nombres d'Ekman, ce maximum en amplitude se trouve au voisinage de $r \sim 0,75$, mais ensuite ce maximum se trouve au niveau de $r \sim 0,35$. Afin de mesurer précisément la dépendance en Ekman, nous avons considéré, pour ce mode, uniquement l'amplitude en $r \sim 0,35$. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 7.14. La première remarque que nous pouvons faire concerne la loi d'échelle pour le mode $\Omega_R = 0,384$. Morize *et al.* (2010) ont déterminé que celle-ci suit une

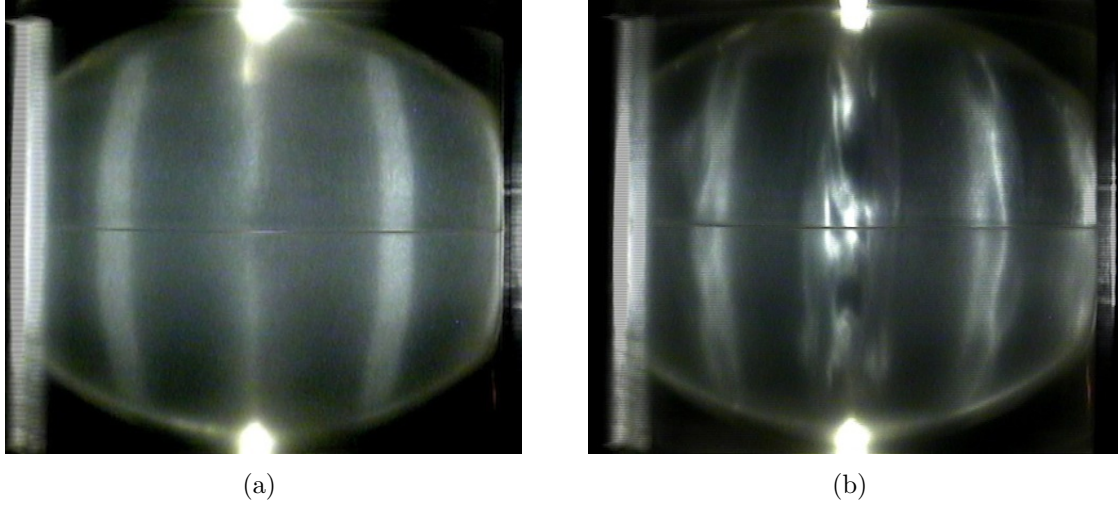


FIGURE 7.12 – Visualisation par particules de Kalliroscope de l'écoulement dans le plan méridional coïncidant avec l'axe de rotation pour $E = 1,42 \times 10^{-5}$, $\Omega_R = 0,384$ et deux amplitudes de forçage différentes, (a) $\beta = 0,03$, (b) $\beta = 0,05$.

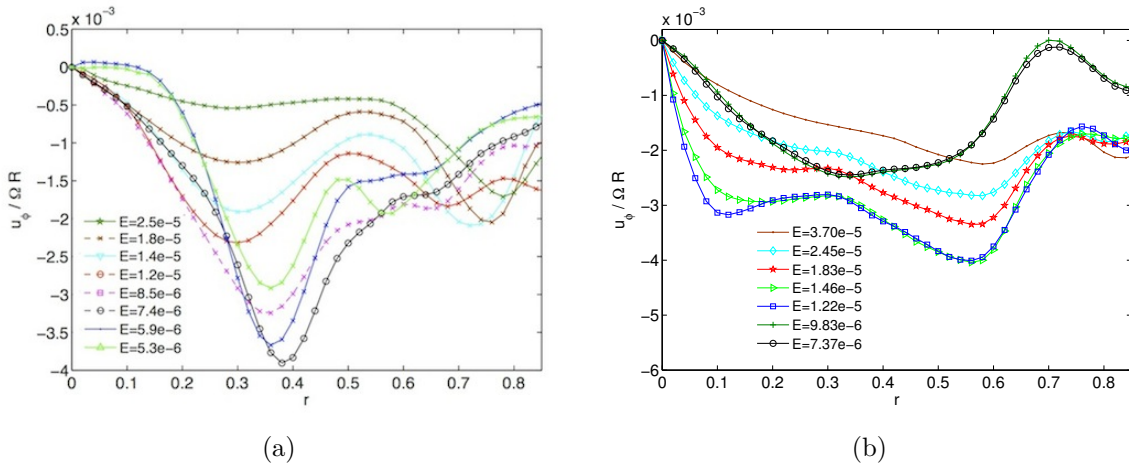


FIGURE 7.13 – Vitesse azimutale du vent zonal adimensionnée, u_ϕ , pour $\beta = 0,045$, et différentes nombres d'Ekman (indiqués sur la figure) pour le mode correspondant à (a) $\Omega_R = 0,178$ et (b) $\Omega_R = 0,384$.

variation en $u_\phi \propto E^{-3/10}$ et ont proposé une explication basée sur la présence d’une latitude critique similaire à celle proposée par [Noir *et al.* \(2001\)](#) dans le cas de la précession. Il s’avère que ce raisonnement ne peut s’appliquer ici. En effet, [Busse \(1968b, 2010a\)](#) ou [Suess \(1971\)](#) ont montré que la présence d’une latitude critique génère un cylindre géostrophique à la verticale de celle-ci. Dans le cas de la précession, par exemple, ce cylindre géostrophique est en $r = 0,866$ comme l’ont montré les expériences de [Malkus \(1968\)](#) ou les simulations numériques de [Noir *et al.* \(2001\)](#). Dans le cas d’un forçage de marées avec une déformation tournante, la position θ_c de la latitude critique vérifie

$$\cos \theta_c = 1 - \Omega_R \quad (7.5)$$

où θ_c est l’angle par rapport à l’axe de rotation. Dans le cas d’une déformation fixe dans le référentiel du laboratoire, nous retrouvons $\theta_c = 0$, c’est-à-dire une latitude critique aux pôles de la sphère, situation étudiée par [Suess \(1971\)](#). Dans le cas d’une déformation tournante à la vitesse angulaire $\Omega_R = 0,384$, la latitude critique se trouve alors à un angle $\theta_c \simeq 52^\circ$. Ainsi, le cylindre géostrophique correspondant à cette latitude critique est à une distance $r \simeq 0,79$ du centre. Or, ce que [Morize *et al.* \(2010\)](#) ont tracé expérimentalement et que nous reportons à l’aide de nos nouvelles mesures sur la figure 7.14 est le maximum de la norme de la vitesse azimutale du vent zonal adimensionnée qui se situe en $r \simeq 0,6$. Ainsi, un raisonnement basé sur une loi d’échelle en $E^{-3/10}$ ne s’applique pas ici. De plus, nous avons recalibré la vitesse de rotation de la sphère et des rouleaux, de manière à pouvoir précisément choisir la fréquence de résonance (le contrôle de la vitesse orbitale se fait maintenant par ordinateur). Ainsi, nous espérons garder une valeur proche de la résonance, même en variant le nombre d’Ekman et donc la vitesse de spin Ω_{spin} . Nous supposons que dans l’étude de [Morize *et al.* \(2010\)](#) la fréquence excitée ait pu être légèrement différente du mode propre de la sphère ($\Omega_R = 0,38$ au lieu de $\Omega_R = 0,384$). Une autre explication pourrait venir de la méthode pour obtenir le champ moyen. Alors que nous avons pris la moyenne temporelle des champs de vitesses filmé en continu (24 images par seconde), [Morize *et al.* \(2010\)](#) ont enregistré une image par tour et pris la moyenne temporelle résultante. Cette différence de méthode pourrait également expliquer les différences observées. Avec notre méthodologie, nous obtenons une variation du maximum de la norme de la vitesse azimutale du vent zonal adimensionnée en $E^{-0,64}$ (voir figure 7.14). De plus, nous notons, tout comme [Morize *et al.* \(2010\)](#), une saturation de l’écoulement zonal au voisinage de $E \sim 10^{-5}$. A l’aide de visualisation par particules de Kalliroscope, nous avons pu voir que l’instabilité présentée précédemment intervient ici lorsque nous diminuons le nombre d’Ekman. Un tel comportement n’est pas surprenant au vu de la variation de l’amplitude de l’écoulement zonal avec le nombre d’Ekman. Lorsque nous diminuons le nombre d’Ekman, le cisaillement devient plus important et peut conduire à une instabilité que nous discuterons dans la suite. Nous avons également considéré l’écoulement associé à un autre mode, pour $\Omega_R = 0,178$. Les résultats expérimentaux sont différents. Dans cette situation la divergence de l’écoulement zonal est bien plus importante, en $E^{-2,1}$. Par contre, nous notons une saturation de l’écoulement pour une valeur plus ou moins identique du nombre d’Ekman, $E \sim 10^{-5}$.

Nous pouvons renormaliser l’écoulement zonal obtenu avec les lois d’échelles ci-dessus. Les profils obtenus sont représentés sur les figures 7.15(a) et 7.15(b) pour respectivement $\Omega_R = 0,178$ et $\Omega_R = 0,384$. Les deux cas montrent une superposition correcte des courbes au voisinage de la zone où a été prise l’amplitude du vent zonal ($r = 0,3$ pour $\Omega_R = 0,178$ et $r = 0,6$ pour $\Omega_R = 0,384$). Néanmoins l’accord est moins bon dans les autres zones, en particulier au voisinage de 0,8 pour $\Omega_R = 0,178$. En pratique, un écoulement zonal induit par les couches visqueuses, similaire au mécanisme présenté au chapitre 3, est toujours présent. L’effet du mode inertiel est principalement localisé dans la sphère au niveau de ces zones de fortes amplitudes. Un point

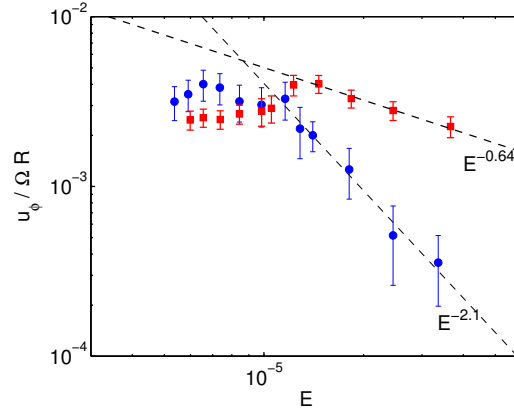


FIGURE 7.14 – Maximum de la norme de la vitesse azimutale du vent zonal adimensionnée, $|u_\phi|_{max}$ en fonction du nombre d'Ekman E pour $\beta = 0,045$ et $\Omega_R = 0,178$ (cercles bleus) et $\Omega_R = 0,384$ (cercles rouges). Les droites en pointillés représentent les meilleures régressions linéaires, respectivement de pente $E^{-2,1}$ et $E^{-0,64}$.

intéressant que l'on peut remarquer sur ces courbes, est que la structure du vent zonal semble également changer quand son amplitude sature. Ce brusque changement est associé à la présence d'une instabilité que nous allons maintenant étudier.

Quelques mots pour conclure sur la variation de l'écoulement zonal avec le nombre d'Ekman. Au vu de ces expériences, atteindre un régime asymptotique au laboratoire semble assez difficile. En effet, même l'expérience actuelle permettant d'obtenir le plus faible nombre d'Ekman n'atteint "que" $E \sim 10^{-7}$ (Zimmerman *et al.*, 2011; Rieutord *et al.*, 2012). Or des simulations numériques de Rieutord *et al.* (2000, 2001) et Rieutord & Valdettaro (2010) ont montré que les comportements asymptotiques ne sont pleinement visibles que pour $E < 10^{-8}$. Donc, dans notre cas, nous ne pouvons dire si le comportement asymptotique est atteint aux points où nous menons nos expériences. Néanmoins l'instabilité observée, elle, est susceptible de se produire de manière générique. Même si les lois d'échelles donnant l'amplitude de l'écoulement zonal sont différentes pour des nombres d'Ekman très faibles, le mécanisme que nous allons discuter dans la suite est susceptible de se produire. Dans la section suivante nous considérons donc la présence de cette instabilité de cisaillement induite par le forçage résonant et proposons une loi d'échelle pour expliquer nos observations.

7.3 Instabilité barotrope générée par les vents zonaux

Nous venons de voir dans la section précédente, que l'écoulement zonal généré varie comme le carré de l'amplitude de forçage de marées, β^2 . Ceci est bien en accord avec un effet non-linéaire. De plus, la dépendance de cet écoulement zonal avec le nombre d'Ekman a montré une saturation de l'écoulement à partir d'une valeur critique. Dans cette section nous allons nous intéresser à ce régime d'écoulement particulier.

7.3.1 Constatation expérimentale

Afin de cerner un peu mieux le type d'instabilité en jeu ici, nous avons effectué des expériences dans une sphère saturée en Kalliroscope. Cette méthode, utilisée pour étudier l'instabilité de

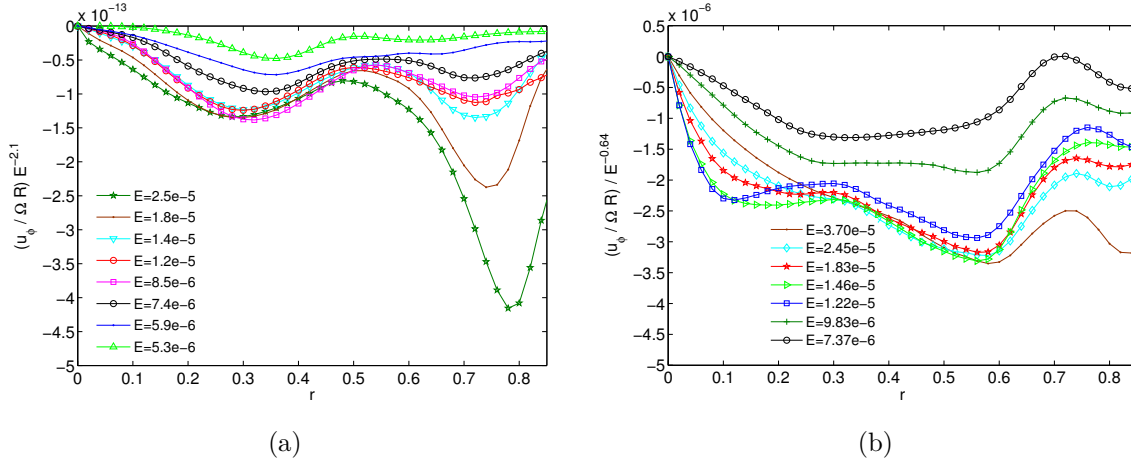


FIGURE 7.15 – Vitesse azimutale du vent zonal adimensionnée et renormalisée par sa variation en E déterminée à la figure 7.14, pour $\beta = 0,045$, et différents nombres d’Ekman (indiqués sur la figure) pour (a) le mode correspondant à $\Omega_R = 0,0178$: $u_\phi / E^{-2,1}$ et (b) $\Omega_R = 0,384$: $u_\phi / E^{-0,64}$.

surface générée par un forçage de libration longitudinale (voir [Noir et al., 2009, 2010](#)), permet de visualiser l’écoulement au voisinage de la paroi extérieure. Qualitativement, la figure 7.16(a) montre qu’en l’absence d’une résonance de modes inertiels, l’écoulement en surface semble stable et aucune structure particulière n’apparaît. A l’inverse, lorsqu’on excite un mode résonant, ici $\Omega_R = 0,384$, pour une amplitude de forçage β suffisamment grande, nous voyons apparaître une structure bien définie à la surface de la sphère (figure 7.16(b)). Cette signature de l’instabilité, non axisymétrique, présente une fréquence azimutale fixée et une certaine extension latitudinale. Finalement, si nous augmentons l’amplitude de forçage, nous voyons apparaître sur la figure 7.16(c) un écoulement turbulent.

Nous avons également effectué des visualisations quand la sphère n’est pas saturée en Kalliroscope, et en éclairant un plan dans l’équateur de la sphère à l’aide d’un laser. La figure 7.17 montre la visualisation des zones de cisaillement obtenue à l’équateur de la sphère. Nous pouvons voir, proche du centre, une bande plus lumineuse, synonyme d’une région stable présentant une importante variation de vitesse. Plus proche de la paroi extérieure, la situation est totalement différente. Nous voyons une zone présentant une alternance de petites régions sombres ou lumineuses. Cette situation rappelle la présence d’une instabilité de cisaillement, générant des rouleaux dont la vorticité est alignée avec l’axe de rotation (voir par exemple [Schaeffer & Cardin, 2005](#); [Guervilly et al., 2012](#)). Le mécanisme responsable de cette instabilité serait donc la forte variation de vitesse induite par l’écoulement zonal et pouvant déstabiliser l’écoulement pour une amplitude de forçage suffisamment grande ou un nombre d’Ekman suffisamment faible.

7.3.2 Mesures quantitatives

Notre système de mesure par PIV ne nous permet malheureusement pas de mesurer précisément les structures associées à l’écoulement instable aux temps courts. Par conséquent, nous avons déterminé le seuil d’instabilité en utilisant une visualisation par particules de Kalliroscope, comme présenté dans la section précédente. Avec les paramètres expérimentaux que nous pouvons atteindre, nous avons pu étudier l’apparition de l’instabilité :

- au niveau de la bande de cisaillement externe pour le mode à $\Omega_R = 0,384$ (bande instable

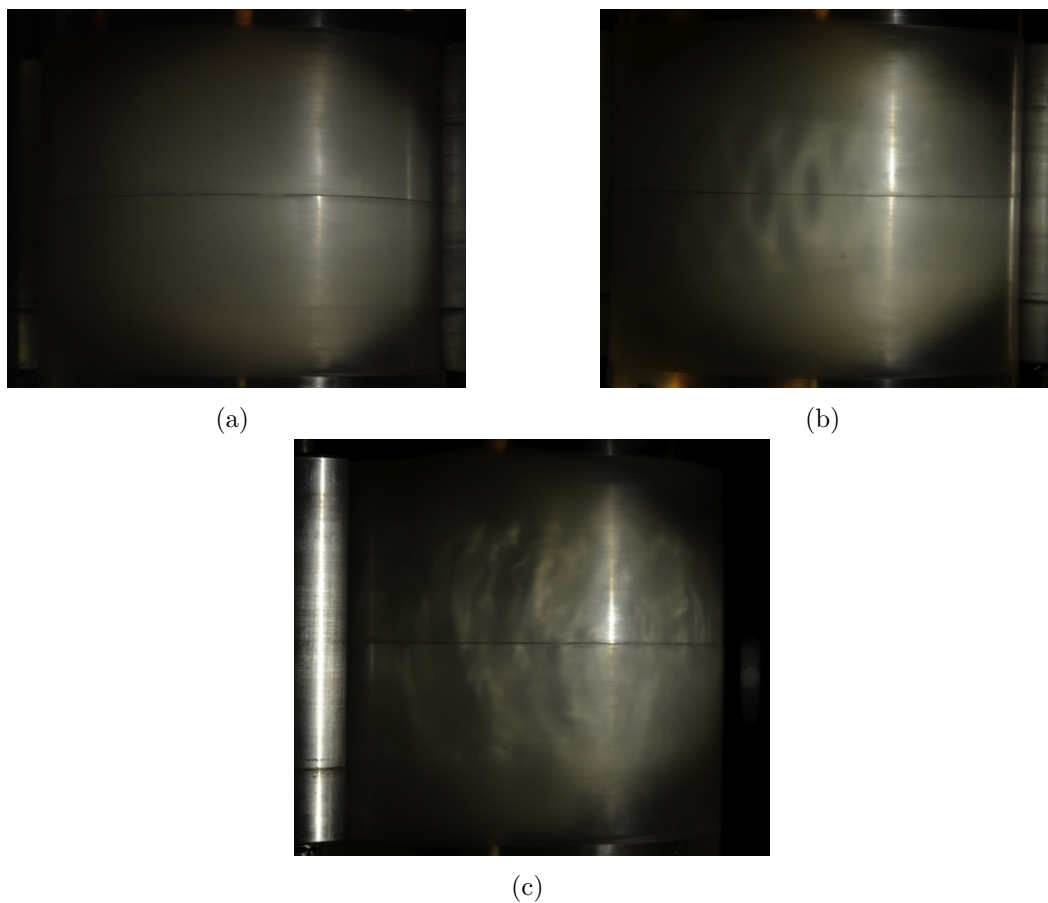


FIGURE 7.16 – Visualisation de l'écoulement en surface par particules de Kalliroscope pour $\beta = 0,05$, $E = 9,46 \times 10^{-5}$ et (a) $\Omega_R = 0,48$ (aucun mode excité), (b) $\Omega = 0,384$ révélant la présence d'une instabilité de longueur d'onde azimutale donnée. La figure (c) est faite pour les mêmes paramètres que (b) mais avec une amplitude de forçage plus grande, $\beta = 0,075$ illustrant la présence d'un écoulement turbulent.

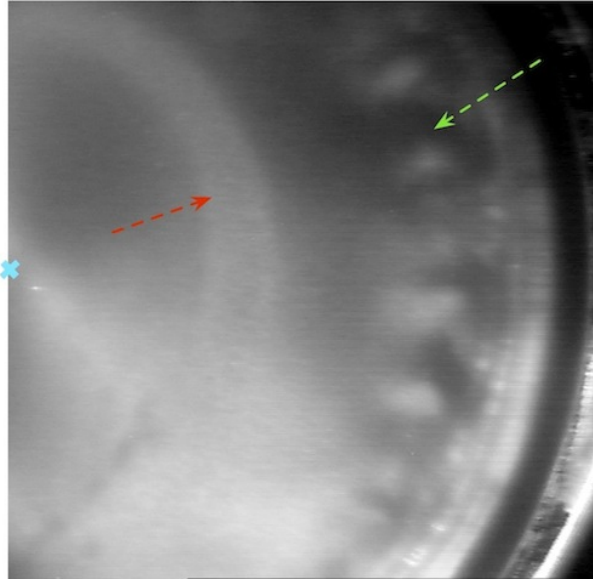


FIGURE 7.17 – Visualisation par particules de Kalliroscope dans le plan équatorial de la sphère soumise à un forçage de marées pour $\Omega_R = 0,384$, $\beta = 0,045$ et $E = 9,46 \times 10^{-6}$. La visualisation est faite depuis le pôle, la croix bleue indique la position approximative du centre de la sphère. Les flèches rouge et verte représentent respectivement des zones de cisaillement stable et instable.

sur la figure 7.17) ;

- au niveau de la bande de cisaillement interne pour le mode à $\Omega_R = 0,384$ (bande qui apparaît stable sur la figure 7.17) ;
- au niveau de la bande de cisaillement externe pour le mode à $\Omega_R = 0,178$.

Malheureusement, pour le mode à $\Omega_R = 0,178$ les paramètres que nous pouvons atteindre ($E \geq 5 \times 10^{-6}$) ne nous permettent pas de découpler précisément l'apparition de l'instabilité au niveau la bande interne. Celle-ci semble perturbée par l'apparition de l'instabilité de la bande de cisaillement externe, qui se fait pour une amplitude de forçage plus faible, et nous n'avons donc pas pu déterminer son seuil d'instabilité.

Dans les autres cas, nous avons utilisé la méthodologie suivante : nous fixons la déformation de la sphère β à une valeur donnée. Ensuite, nous imposons une vitesse angulaire de rotation de la sphère Ω_{spin} , ce qui fixe le nombre d'Ekman de l'écoulement. La vitesse de rotation de la déformation Ω_{orb} est ensuite ajustée de telle sorte que Ω_R soit constant, par exemple $\Omega_R = 0,384$. Nous attendons ensuite suffisamment longtemps (typiquement 10 à 20 minutes) pour voir se développer soit des bandes de cisaillement stables, soit la présence de l'instabilité. Si l'écoulement est stable (respectivement instable), nous augmentons (respectivement diminuons) la vitesse de rotation de la sphère Ω_{spin} , toujours en gardant Ω_R constant jusqu'à déterminer le seuil. Celui-ci est calculé comme étant la moyenne géométrique des nombres d'Ekman correspondant à l'écoulement le moins instable et le plus stable. Dans le cas de l'instabilité de la bande de cisaillement externe, nous avons également effectué une visualisation en surface en saturant la sphère de Kalliroscope (de manière similaire à l'étude [Noir et al. \(2009\)](#) pour étudier l'instabilité centrifuge à la surface de la sphère). Les résultats obtenus sont identiques à ceux trouvés en effectuant une visualisation par particules de Kalliroscope en volume.

Les seuils déterminés expérimentalement sont présentés sur les figures 7.18(a), 7.18(b) et 7.18(c). Dans les trois cas, nous notons une dépendance du seuil sous la forme $\beta_c \propto E^\alpha$ avec

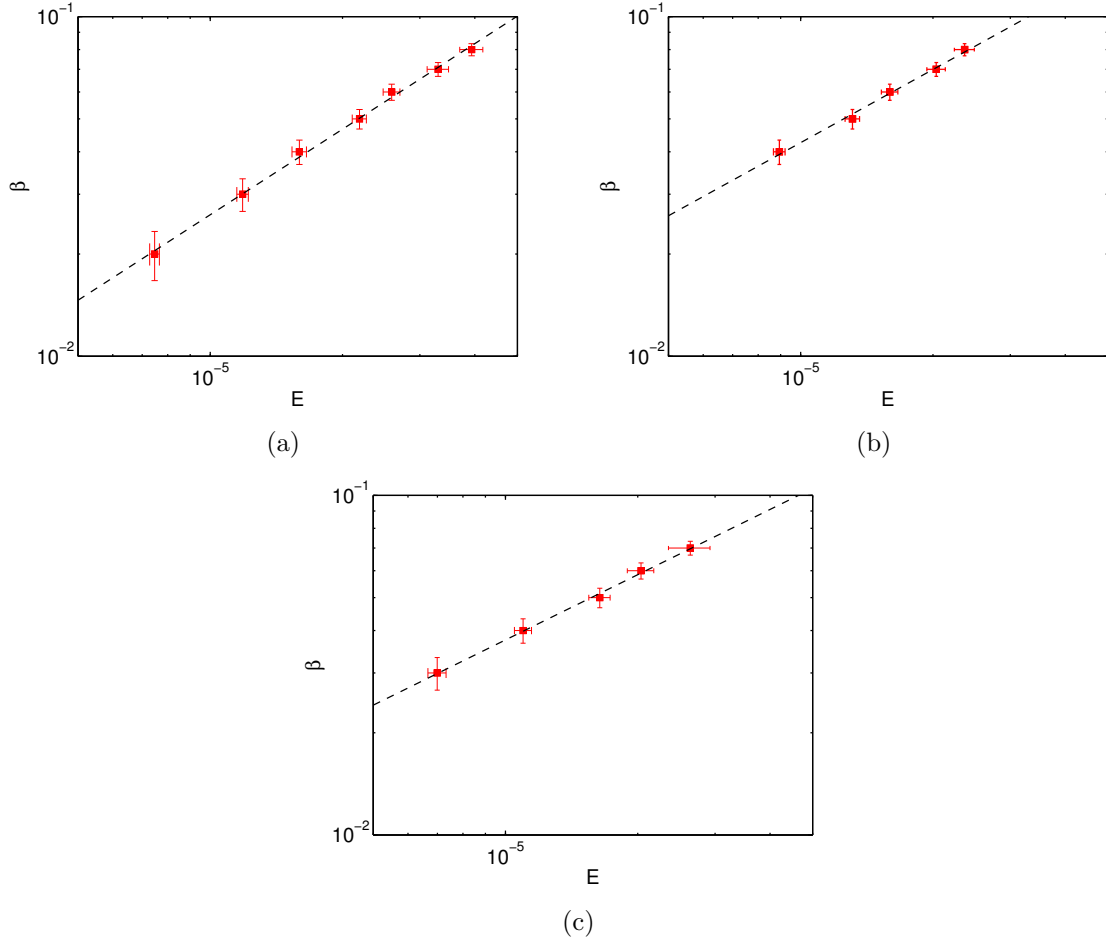


FIGURE 7.18 – Seuil de stabilité obtenu expérimentalement pour (a) la bande externe du mode à $\Omega_R = 0,38$, la droite en tirets noirs est la meilleure régression linéaire : $\beta_c = 399,6 E^{0,84}$. (b) Bande interne du mode à $\Omega_R = 0,38$, la droite en tirets noirs a pour équation $\beta_c = 160,6 E^{0,715}$. (c) Bande externe du mode à $\Omega_R = 0,178$, la droite en tirets noirs a pour équation $\beta_c = 58,5 E^{0,639}$.

$\alpha \in [0,6; 0,85]$. Nous pouvons également remarquer que pour une amplitude de forçage $\beta = 0,045$, le seuil d'instabilité est déterminé pour $E \sim 10^{-5}$. Cette valeur correspond au nombre d'Ekman à partir duquel l'amplitude de la vitesse azimutale associée à l'écoulement zonal sature (voir figure 7.14).

A partir de nos mesures PIV, nous pouvons étudier la variation du seuil correspondant à une instabilité de la bande interne du mode à $\Omega_R = 0,384$. En effet, l'écoulement dans cette bande a pu être quantitativement mesuré (voir figure 7.14). Ainsi, nous pouvons utiliser ces mesures pour estimer par des lois d'échelles le seuil de l'instabilité de cisaillement responsable de la saturation de l'écoulement zonal.

7.3.3 Loi d'échelle

La structure de l'écoulement suggère que le phénomène observé est associé à une instabilité de cisaillement dans un écoulement en rotation (voir par exemple Busse, 1968a; Schaeffer & Cardin, 2005; Guervilly *et al.*, 2012). Dans ce cas, le taux de croissance non-visqueux de cette instabilité est proportionnel à la vorticité axiale définie par

$$\omega_z = \frac{U_\phi}{\rho} + \frac{\partial U_\phi}{\partial \rho}. \quad (7.6)$$

où U_ϕ est l'écoulement axisymétrique dans la sphère. En plus de ce terme "moteur" de l'instabilité de cisaillement, un amortissement visqueux est présent et se met sous la forme $-k^2 E$ où k est la longueur d'onde de l'instabilité de cisaillement. Expérimentalement, il apparaît que cette longueur d'onde est du même ordre de grandeur que la taille de la zone de cisaillement δ . Nous avons donc $k \sim \delta^{-1}$. Il nous faut ensuite estimer l'épaisseur de la zone de cisaillement. Ceci s'avère assez difficile expérimentalement, car le domaine de variation du nombre d'Ekman que nous pouvons étudier est assez restreint, $E \in [5 \times 10^{-6}; 10^{-4}]$. Néanmoins, différentes études théoriques et numériques ont montré que dans le cas d'une sphère, l'épaisseur des zones de cisaillement est d'ordre $E^{1/5}$ (Kerswell, 1995; Kida, 2011). Notons que dans le cas d'une coquille sphérique, l'épaisseur de la zone de cisaillement est différente : $E^{1/3}$ (Rieutord *et al.*, 2000, 2001; Rieutord & Valdettaro, 2010; Ogilvie, 2005; Tilgner, 2007). Dans notre cas, nous pouvons donc poser que la taille caractéristique de la zone de cisaillement où se développe l'instabilité est $\delta \sim E^{1/5}$.

Expérimentalement, nous avons déterminé que l'écoulement axisymétrique est la somme d'une rotation solide et d'un écoulement zonal. L'écoulement zonal, $u_{\phi,2}$ est proportionnel à $\beta^2 E^{-\gamma}$. γ mesure la dépendance en Ekman de cet écoulement zonal ($\gamma = 0,64$ pour la bande interne du mode à $\Omega_R = 0,384$). Ainsi, la vorticité axiale va s'écrire, à l'ordre dominant en Ekman $\omega_z \propto \beta^2 E^{-\gamma} \delta^{-1}$. L'amplitude de forçage critique, β_c , est la valeur de la déformation telle que le terme moteur de l'instabilité soit du même ordre de grandeur que l'atténuation visqueuse qui est proportionnelle à $k^2 E$. Cette condition se traduit par

$$\beta_c^2 E^{-\gamma} \delta^{-1} \sim k^2 E \quad (7.7)$$

Or, la longueur d'onde de l'instabilité est d'ordre $k \sim \delta^{-1} \sim E^{-1/5}$, et avec $\gamma = 0,64$ obtenu expérimentalement dans la section précédente, nous pouvons estimer une loi d'échelle de l'amplitude de forçage critique, β_c :

$$\boxed{\beta_c \propto E^{0,72}} \quad (7.8)$$

Nous pouvons alors reporter la loi d'échelle (7.8) sur les mesures expérimentales du seuil d'instabilité obtenues précédemment. Ce résultat est montré sur la figure 7.19 et présente un

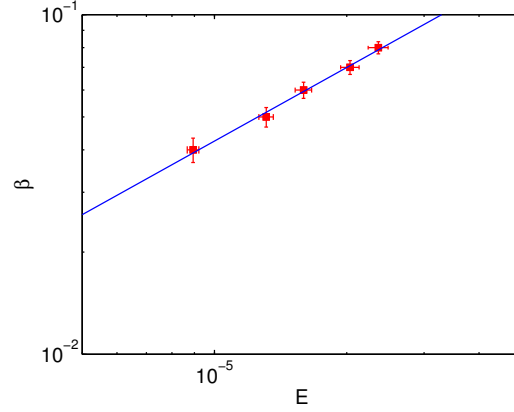


FIGURE 7.19 – Seuil de stabilité obtenu expérimentalement pour la bande interne du mode à $\Omega_R = 0,38$ (carrés rouges). La droite bleue est la loi d'échelle obtenue à la relation 7.8 avec un préfacteur : $\beta_c = 167,3 E^{0,72}$.

accord remarquable avec les expériences. Ceci nous permet de déterminer le préfacteur associé et d'obtenir un critère d'apparition de l'instabilité de cisaillement reliant le nombre d'Ekman de l'écoulement E et l'amplitude de forçage : $\beta_c = 167,3 E^{0,72}$.

En conclusion, la saturation de l'écoulement zonal observé dans une sphère soumise à un forçage de marées est associée à la présence d'une instabilité de cisaillement induite par l'écoulement zonal. En effet, en l'absence de modes inertiels résonants une telle instabilité n'est pas visible. Ce mécanisme, bien qu'illustré sur un mode particulier est également présent pour d'autres modes, en particulier pour un forçage de fréquence $\Omega_R = 0,178$ où nous avons pu déterminer son seuil expérimentalement. Un tel phénomène est susceptible de se produire dans certaines planètes ou satellites car bien que l'amplitude de forçage soit faible, $\beta \sim 10^{-6} - 10^{-4}$, le nombre d'Ekman est petit, $E \sim 10^{-14} - 10^{-12}$. Nous discuterons des possibles conséquences astrophysiques d'un tel forçage dans la conclusion de ce manuscrit. Notons que ce mécanisme a été illustré sur un forçage des marées du fait des ressources disponibles au laboratoire, mais il est susceptible d'être présent via d'autres types de forçages générant un écoulement zonal intense tels que le forçage de libration longitudinale ou le forçage de précession. Ce dernier forçage est particulièrement intéressant, car une étude menée par [Vanyo *et al.* \(1995\)](#) avait pu mettre en évidence la présence d'une structure similaire à celle observée à l'aide de notre forçage de marées. Une prolongation intéressante de ce travail serait d'utiliser un système de PIV plus performant, par exemple embarqué sur une plate-forme en rotation, pour résoudre spatialement et temporellement l'écoulement obtenue au-delà du seuil d'instabilité avec une plus grande précision. Cela permettrait de connaître précisément la structure de l'écoulement instable ainsi que l'écoulement instantané généré.

7.4 Vent zonal en présence d'un noyau interne

Les expériences ont toutes été menées jusqu'à maintenant dans une sphère creuse en rotation. Néanmoins, dans les planètes ou satellites, les enveloppes fluides contiennent la plupart du temps un noyau interne. Ceci rajoute une dynamique particulièrement intéressante. En effet, dans ce cas-là les modes propres deviennent singuliers et l'écoulement zonal généré peut-être modifié. Nous présentons les premiers résultats obtenus dans cette section. Dans toute cette partie, nous

utilisons une coquille sphérique de rapport d'aspect $a = 0,33$.

7.4.1 Modes inertiels dans la coquille

En présence d'un noyau interne, il devient impossible de déterminer analytiquement les modes propres de la coquille sphérique car ils deviennent singuliers (voir par exemple [Tilgner, 1999a](#); [Rieutord et al., 2002](#)). Pour déterminer les fréquences de résonance, nous avons donc étudié systématiquement l'influence du nombre sans dimension $\Omega_R = \Omega_{orbit}/\Omega_{spin}$ en utilisant la méthodologie présentée dans le cas de la sphère. La coquille est remplie de fluide contenant des particules de Kalliroscope. Nous pouvons ainsi déterminer les fréquences de résonance en représentant le gradient de l'intensité lumineuse. Le résultat de nos investigations est présenté en figure 7.20.

En rapprochant ces résultats de ceux obtenus pour un forçage de marées sur une sphère en rotation présentés précédemment, nous pouvons noter que les fréquences propres des modes inertiels changent assez peu. En effet, un pic, localisé autour de $\Omega_R \simeq 0,191$ est à rapprocher du pic à $\Omega_R = 0,178$ obtenu dans la sphère. Le pic, précédemment en $\Omega_R = 0,384$ est maintenant obtenu pour $\Omega_R \simeq 0,39$ et finalement, le pic observé à $\Omega_R = 0,54$ dans la sphère se situe en $\Omega_R \simeq 0,565$ pour la coquille sphérique. En plus de ces trois pics, nous voyons apparaître un mode résonant en $\Omega_R \simeq 0,25$. Globalement, la dynamique de résonance des modes propres n'est pas modifiée en présence d'un noyau. Mais il faut prendre en compte une légère déviation de la fréquence des modes propres.

7.4.2 Visualisation des ondes inertielles

Comme nous l'avons dit précédemment, les modes propres deviennent singulier dans la sphère, et les ondes inertielles émises tangentiellement au noyau sont suspectées avoir une amplitude plus grande ([Kerswell, 1995](#); [Tilgner, 2007](#)). Cette forte variation d'amplitude dans la zone de cisaillement d'une onde interielle permet une observation directe des ondes inertielles dans la coquille sphérique (e.g. [Koch et al., 2011](#)). La plupart des visualisations par particules de Kalliroscope de l'écoulement résultant de forçages sur une sphère en rotation ne peuvent mettre en évidence que les cylindres géostrophiques, témoins de la variation de la vitesse azimutale de l'écoulement (voir par exemple [Aldridge, 1967](#); [Noir et al., 2001](#); [Morize et al., 2010](#)). Les figures 7.21(a) et 7.21(b) montrent la visualisation directe des ondes inertielles émises tangentiellement au noyau.

7.4.3 Instabilité de cisaillement

Nous avons vu dans la section précédente qu'une instabilité de cisaillement est présente dans la sphère. En pratique le même phénomène apparaît dans la coquille sphérique, comme illustré par les figures 7.22(a) et 7.22(b). De plus, cette instabilité semble encore plus forte dans ce cas.

A l'heure actuelle nous n'avons malheureusement pas de mesures quantitatives de l'amplitude de l'écoulement zonal. Néanmoins, nous pouvons utiliser les résultats numériques de [Tilgner \(2007\)](#) qui a déterminé numériquement que l'énergie cinétique associée au vent zonal présente une divergence en $E^{-3/2}$ quand E devient petit. De plus, ses simulations numériques ne peuvent pas capturer cette instabilité de cisaillement car les effets tridimensionnels ne sont pas pris en compte. Dans son cas l'écoulement zonal présente une variation en $\beta^2 E^{-3/4}$. De plus, dans le cas d'un noyau interne, la taille caractéristique d'une zone de cisaillement est de $\delta \sim E^{1/3}$ ([Tilgner,](#)

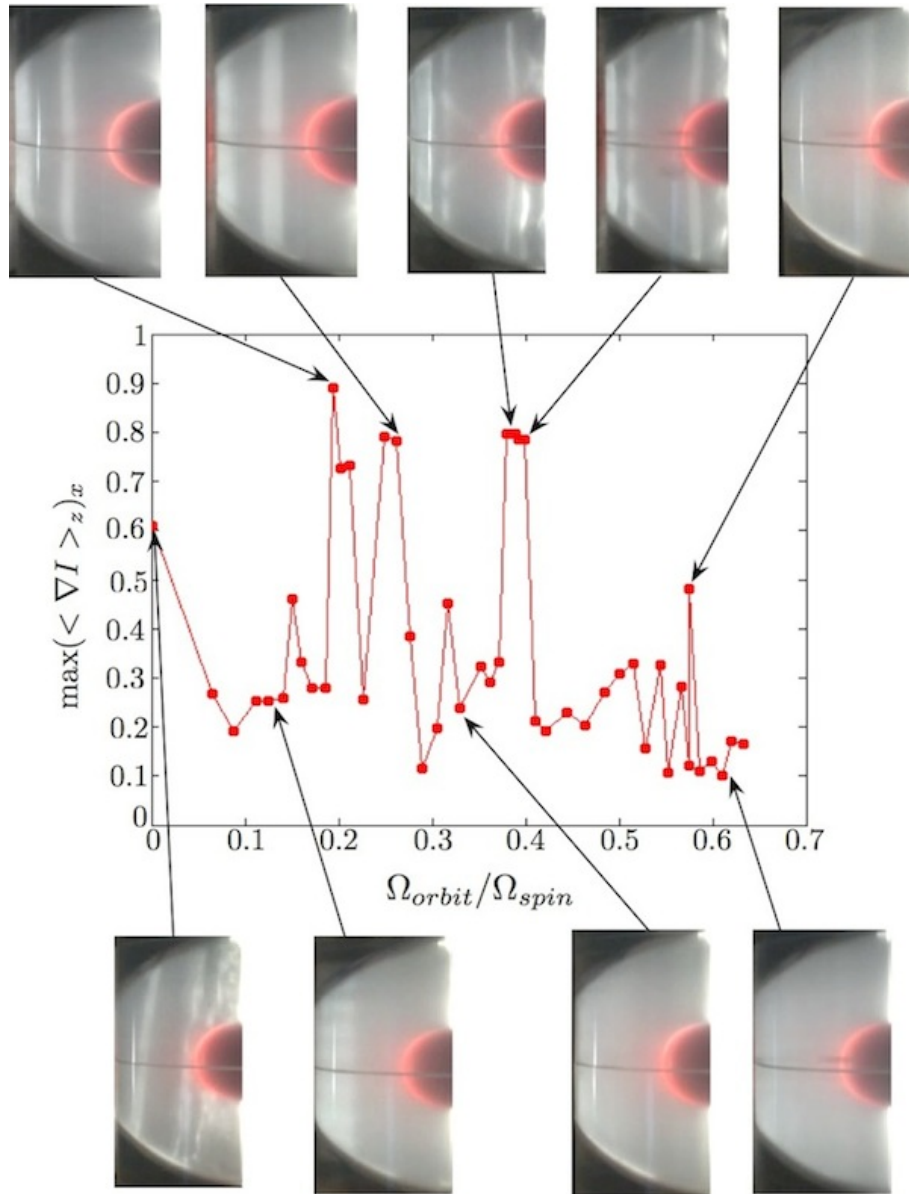


FIGURE 7.20 – Détermination des modes résonants par visualisation directe (particules de Kalliroscope) pour $E = 9,46 \times 10^{-6}$, $\beta = 0,04$. La courbe représente le gradient d'intensité lumineuse en fonction de Ω_R .

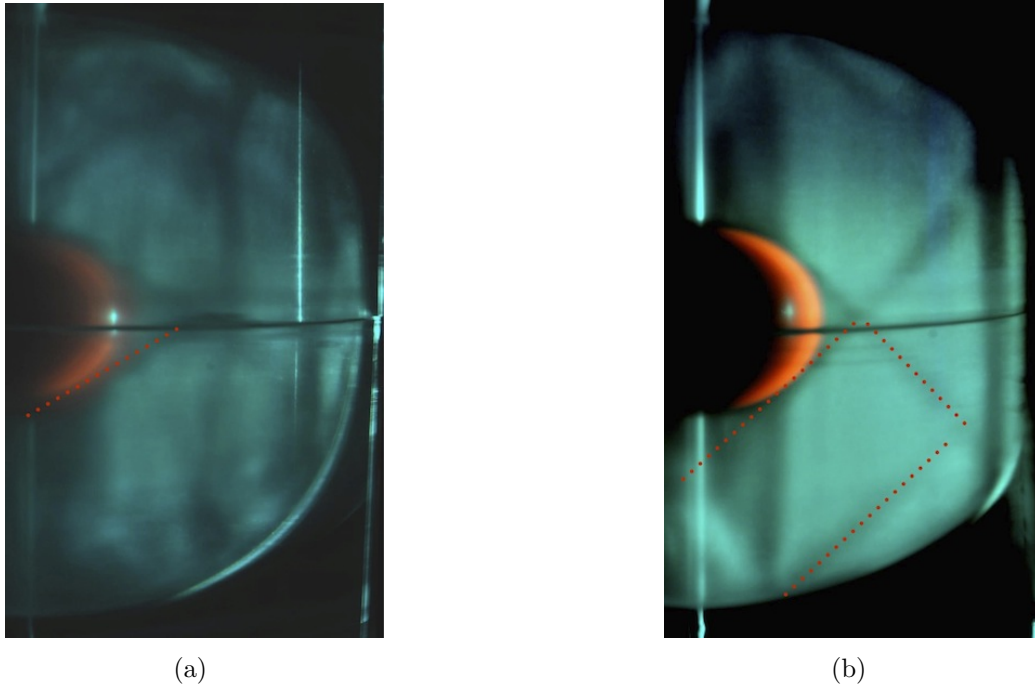


FIGURE 7.21 – Visualisation par particules de Kalliroscope de modes résonants dans la coquille sphérique pour $E = 9.86 \times 10^{-6}$, $\beta = 0,03$ et (a) $\Omega_R = 0,191$, (b) $\Omega_R = 0,39$.

2007; Rieutord & Valdettaro, 2010), ce qui nous conduirait à un seuil d'instabilité de la forme

$$\beta_c \propto E^{0,7083} \quad (7.9)$$

qui incidemment est proche de la loi d'échelle trouvée expérimentalement.

7.4.4 Perspectives

Afin de prolonger ce travail à la coquille sphérique, des mesures PIV doivent être effectuées pour étudier la variation de l'amplitude de l'écoulement zonal avec le nombre d'Ekman. Selon les travaux numériques de Tilgner (2007) présentés en début de chapitre, l'écoulement zonal doit devenir encore plus intense. Dans ce cas, nous suspectons que l'instabilité de cisaillement doit apparaître pour des valeurs du nombre d'Ekman plus grandes ou une amplitude de forçage plus faible.

7.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des résultats expérimentaux relatifs au forçage de modes résonants dans une sphère en rotation. A l'aide d'un forçage de marées, nous avons pu déterminer quantitativement l'écoulement zonal généré pour deux modes propres de la sphère. La dépendance avec l'amplitude et la fréquence de forçage a été caractérisée. Ces mesures nous ont permis de montrer que la correction varie comme le carré du forçage, caractéristique d'un effet non-linéaire et qu'elle dépend du nombre d'Ekman. De plus, nous avons étendu les résultats de Morize *et al.* (2010) en montrant expérimentalement que la saturation de l'écoulement zonal, quand le nombre d'Ekman diminue, est causée par la présence d'une instabilité de cisaillement.

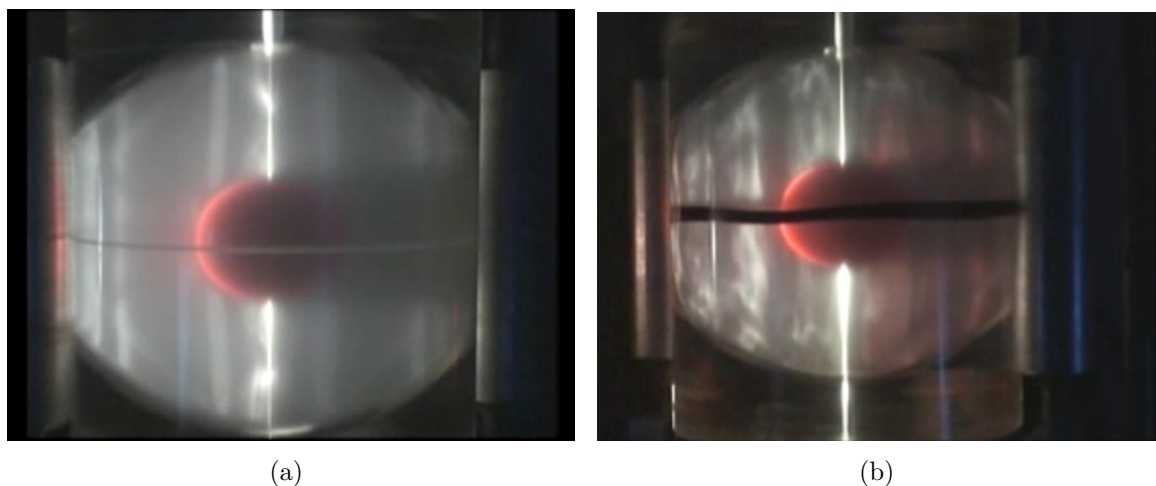


FIGURE 7.22 – Visualisation par particules de Kalliroscope de l'écoulement dans la coquille sphérique pour $E = 1.42 \times 10^{-5}$, $\Omega_R = 0,39$ et (a) $\beta = 0,03$ et (b) $\beta = 0,05$.

Le seuil de cet instabilité a été déterminé expérimentalement et une loi d'échelle a été construite, en très bon accord avec les résultats expérimentaux. Des expériences en présence d'un noyau ont également été présentées, et montrent que la présence de celui-ci semble générer un écoulement encore plus intense dans le volume. Les conséquences aux échelles planétaires de ce phénomène seront discutées dans la conclusion de ce manuscrit.

Latitude critique

Notwithstanding that the theory is often not a little suspect among practical men, since nevertheless it rests upon the most certain principles of mechanics, its truth is in no way weakened by this disagreement, but rather one must seek the cause of the difference in the circumstances which are not properly considered in the theory.

Leonhard Euler

Sommaire du chapitre

8.1 Introduction	170
8.2 Latitude critique aux pôles	173
8.3 Latitude critique à l'équateur	176
8.4 Latitude critique en $\theta_c \in]0; \pi/2[$	177
8.5 Conclusions et perspectives	178

Dans les chapitres 3 et 4 nous avons considéré l'écoulement zonal généré dans une sphère soumise à un forçage harmonique, plus précisément à un forçage de libration longitudinale. Analytiquement, nous avons considéré le cas particulier où la fréquence de libration est supérieure à deux fois la vitesse angulaire de la sphère, $\omega > 2$. En effet, si nous revenons au calcul effectué dans le chapitre 3, nous pouvons déjà voir dans la solution linéaire (relations 3.13(a,b) et 3.14) que l'écoulement dans la couche limite diverge pour certaines valeurs de θ si $\omega < 2$. Plus précisément, si $\theta = \arccos(\omega/2)$, le terme λ_- s'annule et la solution devient singulière. Nous avons écarté ce problème dans le calcul théorique mené précédemment car la situation devient alors beaucoup plus complexe.

Ce problème de divergence au voisinage des latitudes critiques n'est pas nouveau. En effet, dans les années 1950, 1960, de nombreuses études se sont intéressées à l'écoulement de précession dans une sphère en rotation (voir notamment Bondi & Lyttleton, 1953; Malkus, 1968; Busse, 1968b). De manière identique à la situation exposée au chapitre 3, l'écoulement dans la sphère peut être séparé en deux régions : un écoulement non-visqueux dans le volume et un écoulement dans la couche limite visqueuse, d'épaisseur $E^{1/2}$ au voisinage de la paroi extérieure. Néanmoins, cette approche de couche limite n'est plus valable en certains points, localisés en $\theta = \pi/3$ et $\theta = 2\pi/3$ où la solution devient singulière (voir notamment Kida, 2011). Cette singularité

dans la couche limite nécessite d'introduire de nouvelles échelles de longueur et de vitesse au voisinage de la latitude critique. La nouvelle équation différentielle à considérer, dans le cas de la précession, a été obtenue par [Roberts & Stewartson \(1963\)](#). Néanmoins ce problème n'avait jamais été résolu avant le début de cette thèse, malgré le fait que de nombreuses études aient souligné ce problème récurrent.

En pratique, nous allons voir dans la suite de ce chapitre, que les échelles à considérer et les équations qui en résultent dépendent de la position de la latitude critique. Les trois situations possibles peuvent être obtenues en considérant un forçage de libration longitudinale. Le cas de la précession étant alors équivalent à un forçage de fréquence $\omega = 1$. Deux autres situations sont également possibles : le cas où $\omega = 2$ où la latitude critique est localisée aux pôles de la sphère ([Suess, 1971](#)) et le cas de la libration pour $\omega \rightarrow 0$ où la latitude critique se situe au voisinage de l'équateur ([Busse, 2010a](#)).

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés à ces trois situations. Parallèlement à notre étude, [Kida \(2011\)](#) a pu résoudre le problème dans le cas de la précession. De notre côté nous nous sommes heurtés à des difficultés numériques car les équations obtenues sont délicates à résoudre numériquement. La méthode pseudo-spectrale que nous avons initialement employée conduit à une solution fortement instable. [Kida \(2011\)](#) a pu résoudre ce problème en utilisant une méthode de différences finies. Malheureusement, il ne nous a pas été possible de finir la résolution numérique de ces équations dans le temps imparti par la thèse. Néanmoins, dans ce chapitre, nous regroupons dans un unique formalisme les adimensionnements nécessaires et les équations correspondantes pour traiter les différents cas. Ce chapitre est, bien entendu, non clos, et la résolution numérique de ces équations constituera une prolongation naturelle de ce travail dans un futur proche.

8.1 Introduction

Reprenons la situation étudiée au chapitre 3 : l'écoulement d'un fluide incompressible, de viscosité ν , contenu dans une sphère de rayon R en rotation rapide soumise à un forçage de libration longitudinale. En utilisant respectivement R et Ω_0^{-1} comme échelles de longueur et de temps, la vitesse angulaire instantanée de la sphère s'écrit

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = [1 + \varepsilon \cos(\omega t)] \mathbf{e}_z, \quad (8.1)$$

où ε et ω représentent respectivement l'amplitude et la fréquence de libration longitudinale. Dans le référentiel inertiel, le mouvement du fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes et de continuité adimensionnées :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla p + E \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (8.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (8.3)$$

où E est le nombre d'Ekman défini par $E = \nu/(\Omega_0 R^2)$. L'étude est faite en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . Dans ce référentiel inertiel, la condition d'adhérence à la paroi extérieure s'écrit :

$$\mathbf{v}_\Sigma = \mathbf{v}(r = 1, \theta) = \sin \theta [1 + \varepsilon \cos(\omega t)] \mathbf{e}_\phi. \quad (8.4)$$

En l'absence de forçage ($\varepsilon = 0$), l'écoulement est une simple rotation solide :

$$\mathbf{v}^{(0)} = r \sin \theta \mathbf{e}_\phi, \quad (8.5)$$

$$p^{(0)} = \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta. \quad (8.6)$$

Puis, si un forçage de libration longitudinale de faible amplitude ($\varepsilon \ll 1$) est imposé, nous pouvons, comme au chapitre 3, développer les champs de vitesses et de pression comme une série de ε :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{v}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{v}^{(2)} + O(\varepsilon^2), \quad (8.7)$$

$$p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + O(\varepsilon^2). \quad (8.8)$$

De plus, dans la limite des faibles nombres d'Ekman, $\sqrt{E} \ll 1$, l'écoulement se sépare en deux parties : une contribution non-visqueuse dans le volume, \mathbf{U} , et une contribution dans la couche limite où les effets visqueux sont pris en compte, \mathbf{u} . L'étude est menée dans la limite $E \ll \omega$: le fluide à l'intérieur n'est pas mis en rotation et les effets de l'oscillation sont limités à la couche limite. Ainsi, à l'ordre εE^0 , on a dans le volume :

$$U_r^{(1)} = 0, \quad U_\theta^{(1)} = 0 \quad \text{et} \quad U_\phi^{(1)} = 0. \quad (8.9)$$

Au voisinage de la paroi extérieure, $r = 1$, on introduit les variables de couches limites :

$$r = 1 - \zeta E^{1/2}, \quad (8.10)$$

$$u_r^{(1)}(r, \theta) = E^{1/2} u_{B\zeta}(\zeta, \theta), \quad (8.11)$$

$$u_\theta^{(1)}(r, \theta) = u_{B\theta}(\zeta, \theta), \quad (8.12)$$

$$u_\phi^{(1)}(r, \theta) = u_{B\phi}(\zeta, \theta), \quad (8.13)$$

$$p^{(1)}(r, \theta) = E^{1/2} p_B(\zeta, \theta). \quad (8.14)$$

En considérant uniquement la partie proportionnelle à $\exp(i\omega t)$ et en utilisant ces variables de couches limites, les équations (8.2)-(8.3) se réécrivent à l'ordre dominant :

$$-2 \sin \theta u_{B\phi} = \frac{\partial p_B}{\partial \zeta}, \quad (8.15)$$

$$i\omega u_{B\theta} - 2 \cos \theta u_{B\phi} = \frac{\partial^2 u_{B\theta}}{\partial \zeta^2}, \quad (8.16)$$

$$i\omega u_{B\phi} + 2 \cos \theta u_{B\theta} = \frac{\partial^2 u_{B\phi}}{\partial \zeta^2}, \quad (8.17)$$

$$-\frac{\partial u_{B\zeta}}{\partial \zeta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_{B\theta}) = 0. \quad (8.18)$$

Les conditions de non-glissement à la paroi extérieure se traduisent par

$$u_{B\zeta}(0, \theta) = 0, \quad u_{B\theta}(0, \theta) = 0 \quad \text{et} \quad u_{B\phi}(0, \theta) = \frac{\sin \theta}{2} e^{i\omega t}. \quad (8.19)$$

Et la condition de raccordement entre la couche limite et le volume ($\zeta \rightarrow +\infty$), conduit à

$$u_{B\theta}(\infty, \theta) = 0 \quad \text{et} \quad u_{B\phi}(\infty, \theta) = 0. \quad (8.20)$$

Le système (8.15)-(8.20) conduit alors à la solution :

$$u_{B\zeta}(\zeta, \theta) = \frac{i \cos \theta}{2} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_+ \zeta}}{\lambda_+} - \frac{1 - e^{-\lambda_- \zeta}}{\lambda_-} \right) - \frac{\sin^2 \theta}{4} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_+ \zeta} (1 + \zeta \lambda_+)}{\lambda_+^3} + \frac{1 - e^{-\lambda_- \zeta} (1 + \zeta \lambda_-)}{\lambda_-^3} \right), \quad (8.21)$$

$$u_{B\theta}(\zeta, \theta) = \frac{i \sin \theta}{4} (e^{-\lambda_+ \zeta} - e^{-\lambda_- \zeta}), \quad (8.22)$$

$$u_{B\phi}(\zeta, \theta) = \frac{\sin \theta}{4} (e^{-\lambda_+ \zeta} + e^{-\lambda_- \zeta}), \quad (8.23)$$

$$p_B(\zeta, \theta) = \frac{\sin^2 \theta}{2} \left(\frac{e^{-\lambda_+ \zeta} - 1}{\lambda_+} + \frac{e^{-\lambda_- \zeta} - 1}{\lambda_-} \right), \quad (8.24)$$

où on a défini, de manière similaire à Busse (1968b, 2010a) et Suess (1971),

$$\lambda_+ = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega}{2} + \cos \theta}, \quad (8.25)$$

$$\lambda_- = (1 + i \operatorname{sgn}(\omega/2 - \cos \theta)) \sqrt{\left| \frac{\omega}{2} - \cos \theta \right|}. \quad (8.26)$$

Dans ces expressions $\operatorname{sgn}(x)$ est la fonction signe qui vaut 1 si $x \geq 0$ et -1 si $x < 0$.

À la sortie de la couche limite, la composante radiale du champ des vitesses s'écrit :

$$u_{B\zeta}(\infty, \theta) = \frac{(1 + i) (2\omega \cos \theta + 3 \cos^2 \theta + 1)}{4(\omega + 2 \cos \theta) \sqrt{2\omega + 4 \cos \theta}} - \frac{(\operatorname{sgn}(\omega/2 - \cos \theta) + i) (2\omega \cos \theta - 3 \cos^2 \theta - 1)}{4(\omega - 2 \cos \theta) \sqrt{|2\omega - 4 \cos \theta|}}. \quad (8.27)$$

Le second terme de l'expression (8.27) est singulier si $\omega/2 - \cos \theta = 0$. Cette divergence est associée à la présence d'une latitude critique.

Le champ des vitesses obtenu diverge pour $\theta_c = \arccos(\omega/2)$. Pour résoudre cette singularité, il faut introduire de nouveaux scalings au voisinage de la *latitude critique* θ_c . Trois situations différentes doivent être considérées :

- Une fréquence de libration $\omega \in]0; 2[$.
- Une fréquence de libration $\omega = 0$, dans ce cas, la singularité est au niveau de l'équateur.
- Une fréquence de libration $\omega = 2$: la singularité se situe au niveau des pôles.

Notons que le cas de la précession, traité récemment par Kida (2011), est équivalent à un forçage de libration $\omega = 1$, la latitude critique se situe alors en $\theta_c = \pi/3$. Le cas d'une sphère soumise à un forçage de marées (Suess, 1971) correspond à une fréquence de libration $\omega = 2$ et la latitude critique se situe alors aux pôles $\theta_c = 0$. Dans les sections suivantes nous allons mettre en équation les trois différents cas. Notons que nous avons considéré ici un écoulement axisymétrique pour simplifier les calculs, mais que ce calcul peut s'étendre à la composition d'un forçage de fréquence temporelle ω et de fréquence azimutale m . Dans ce cas, les conditions précédentes s'appliquent respectivement pour $\omega + m \in]0; 2[$, $\omega + m = 0$ et $\omega + m = 2$.

8.2 Latitude critique aux pôles

On considère dans cette section un forçage de libration longitudinale à la fréquence $\omega = 2$. On analyse l'écoulement dans la moitié supérieure de la sphère car la situation est symétrique par rapport à l'équateur. On s'intéresse donc à la latitude critique en $\theta_c = 0$, ce qui correspond à une singularité du terme λ_- . La partie singulière du champ des vitesses et de pression dans la couche limite se réduit à :

$$u_{B\zeta}^S(\zeta, \theta) = -\frac{i \cos \theta}{2} \frac{1 - e^{-\lambda_- \zeta}}{\lambda_-} - \frac{\sin^2 \theta}{4} \frac{1 - e^{-\lambda_- \zeta} (1 + \zeta \lambda_-)}{\lambda_-^3}, \quad (8.28)$$

$$u_{B\theta}^S(\zeta, \theta) = -\frac{i \sin \theta}{4} e^{-\lambda_- \zeta}, \quad (8.29)$$

$$u_{B\phi}^S(\zeta, \theta) = \frac{\sin \theta}{4} e^{-\lambda_- \zeta}, \quad (8.30)$$

$$p_B^S(\zeta, \theta) = \frac{\sin^2 \theta}{2} \frac{e^{-\lambda_- \zeta} - 1}{\lambda_-}, \quad (8.31)$$

que l'on remplacera par la solution trouvée au voisinage de la latitude critique. Puisque le scaling de couche limite (8.10)-(8.14) n'est plus valide aux pôles, on introduit de nouvelles échelles radiale et latitudinale par :

$$r = 1 - \tilde{r} E^p \quad \text{et} \quad \theta = \tilde{\theta} E^q. \quad (8.32)$$

où p et q sont deux coefficients à déterminer tels que $(p, q) \in]0; 1/2[$. Au voisinage de l'axe ($\theta = 0$), on développe la partie singulière du champ des vitesses (8.28)-(8.31) en puissance de E à l'aide de ces nouvelles variables :

$$u_{B\zeta}^S(\tilde{r}, \tilde{\theta}) = -\frac{E^{-q}}{\tilde{\theta}} \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \left[1 - \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \tilde{\theta} \tilde{r} E^{q+p-\frac{1}{2}}\right) \right] - \frac{i \tilde{r} E^{-q}}{4} \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \tilde{\theta} \tilde{r} E^{q+p-\frac{1}{2}}\right), \quad (8.33)$$

$$u_{B\theta}^S(\tilde{r}, \tilde{\theta}) = \left(-\frac{i \tilde{\theta} E^q}{4} + \frac{i \tilde{\theta}^3 E^{3q}}{24} \right) \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \tilde{\theta} \tilde{r} E^{q+p-\frac{1}{2}}\right), \quad (8.34)$$

$$u_{B\phi}^S(\tilde{r}, \tilde{\theta}) = \left(\frac{\tilde{\theta} E^q}{4} - \frac{\tilde{\theta}^3 E^{3q}}{24} \right) \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \tilde{\theta} \tilde{r} E^{q+p-\frac{1}{2}}\right), \quad (8.35)$$

$$p_B^S(\tilde{r}, \tilde{\theta}) = \frac{(1-i) \tilde{\theta} E^q}{2\sqrt{2}} \left[\exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \tilde{\theta} \tilde{r} E^{q+p-\frac{1}{2}}\right) - 1 \right]. \quad (8.36)$$

Pour que la partie singulière du champ des vitesses et de pression dépende à la fois des variables \tilde{r} et $\tilde{\theta}$, il faut que

$$p + q = \frac{1}{2} \quad (8.37)$$

Le scaling du champ des vitesses au voisinage de la latitude critique peut alors être estimé à partir des relations (8.10)-(8.14) et des relations (8.33)-(8.36) :

$$u_r(r, \theta) = E^{1/2-q} u_{C\zeta}(\tilde{r}, \tilde{\theta}), \quad (8.38)$$

$$u_\theta(r, \theta) = E^q u_{C\theta}(\tilde{r}, \tilde{\theta}) + E^{3q} u_{C\theta}^{(1)}(\tilde{r}, \tilde{\theta}), \quad (8.39)$$

$$u_\phi(r, \theta) = E^q u_{C\phi}(\tilde{r}, \tilde{\theta}) + E^{3q} u_{C\phi}^{(1)}(\tilde{r}, \tilde{\theta}), \quad (8.40)$$

$$p(r, \theta) = E^{1/2+q} p_C(\tilde{r}, \tilde{\theta}). \quad (8.41)$$

Avec ces scalings, l'équation de continuité (8.3) s'écrit :

$$-E^{1/2-q-p} \frac{\partial u_{C\zeta}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} (\tilde{\theta} u_{C\theta}) = 0 \quad (8.42)$$

La relation (8.37) implique que l'équation précédente se réécrit simplement à l'ordre E^0 :

$$\frac{\partial u_{C\zeta}}{\partial \tilde{r}} = \frac{1}{\tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} (\tilde{\theta} u_{C\theta}) \quad (8.43)$$

L'équation de Navier-Stokes avec les scalings (8.38) conduit aux relations :

$$2i E^{\frac{1}{2}-q} u_{C\zeta} - 2 E^{2q} \tilde{\theta} u_{C\phi} - E^{2q} \frac{\partial p_C}{\partial \tilde{r}} - E^{\frac{1}{2}+q} \frac{\partial^2 u_{C\zeta}}{\partial \tilde{r}^2} + \dots = 0, \quad (8.44)$$

$$E^q (2i u_{C\theta} - 2 u_{C\phi}) + E^{3q} \left(2i u_{C\theta}^{(1)} + \tilde{\theta}^2 u_{C\phi} - 2 u_{C\phi}^{(1)} - \frac{\partial^2 u_{C\theta}}{\partial \tilde{r}^2} \right) + E^{1/2} \frac{\partial p_C}{\partial \tilde{\theta}} + \dots = 0, \quad (8.45)$$

$$E^q (2i u_{C\phi} + 2 u_{C\theta}) + E^{3q} \left(2i u_{C\phi}^{(1)} - \tilde{\theta}^2 u_{C\theta} + 2 u_{C\theta}^{(1)} - \frac{\partial^2 u_{C\phi}}{\partial \tilde{r}^2} \right) + 2 \tilde{\theta} E^{\frac{1}{2}} u_{C\zeta} + \dots = 0. \quad (8.46)$$

La solution la plus générale est obtenue dans (8.44) lorsque les trois premiers termes sont du même ordre de grandeur, ce qui implique $2q = 1/2 - q$. Cette relation, avec l'égalité (8.37) nous permet d'obtenir le scaling au voisinage du pôle :

$$p = \frac{1}{3} \quad \text{and} \quad q = \frac{1}{6}. \quad (8.47)$$

L'équation (8.44) conduit alors à l'ordre dominant en $E^{1/3}$:

$$2i u_{C\zeta} - 2i \tilde{\theta} u_{C\phi} - \frac{\partial p_C}{\partial \tilde{r}} = 0. \quad (8.48)$$

Le terme dominant dans les équations (8.45) et (8.46), est à l'ordre $E^{1/6}$. Il conduit à la relation

$$i u_{C\theta} = u_{C\phi}. \quad (8.49)$$

Puisque l'équation est dégénérée à cet ordre, on examine l'ordre suivant pour déterminer la solution. Celui-ci est à l'ordre $E^{1/2}$ et la solution générale s'écrit :

$$2i u_{C\theta}^{(1)} - 2u_{C\phi}^{(1)} + \tilde{\theta}^2 u_{C\phi} - \frac{\partial^2 u_{C\theta}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{\partial p_C}{\partial \tilde{\theta}} = 0, \quad (8.50)$$

$$2i u_{C\phi}^{(1)} + 2u_{C\theta}^{(1)} - \tilde{\theta}^2 u_{C\theta} - \frac{\partial^2 u_{C\phi}}{\partial \tilde{r}^2} + 2 \tilde{\theta} u_{C\zeta} = 0. \quad (8.51)$$

La combinaison des équations (8.50) et (8.51) conduit à

$$2 \frac{\partial^2 u_{C\theta}}{\partial \tilde{r}^2} + 2i \tilde{\theta} u_{C\zeta} - 2i \tilde{\theta}^2 u_{C\theta} = \frac{\partial p_C}{\partial \tilde{\theta}}. \quad (8.52)$$

Avec l'expression (8.43), on obtient finalement :

$$2 \frac{\partial^4 u_{C\theta}}{\partial \tilde{r}^4} + 2i \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r} \partial \tilde{\theta}} (\tilde{\theta} u_{C\theta}) - 2i \tilde{\theta}^2 \frac{\partial^2 u_{C\theta}}{\partial \tilde{r}^2} = \frac{\partial^3 p_C}{\partial \tilde{\theta} \partial \tilde{r}^2}. \quad (8.53)$$

Puis en utilisant les relations (8.43) et (8.44), on obtient

$$2i \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{1}{\tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} (\tilde{\theta} u_{C\theta}) \right) - 2i \frac{\partial u_{C\theta}}{\partial \tilde{r}} - 2i \tilde{\theta} \frac{\partial^2 u_{C\theta}}{\partial \tilde{r} \partial \tilde{\theta}} = \frac{\partial^3 p_C}{\partial \tilde{\theta} \partial \tilde{r}^2} \quad (8.54)$$

On aboutit alors à l'équation suivante :

$$\left(i \frac{\partial^4}{\partial \tilde{r}^4} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\theta}^2} + \frac{1}{\tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} - \frac{1}{\tilde{\theta}^2} + \tilde{\theta}^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} - 2\tilde{\theta} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r} \partial \tilde{\theta}} - 2 \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \right) u_{C\theta} = 0 \quad (8.55)$$

Afin de déterminer les conditions aux limites à appliquer pour résoudre l'équation (8.55) du quatrième ordre en \tilde{r} et du second ordre en $\tilde{\theta}$, on compare les expressions (8.38)-(8.41) avec les expressions (8.33)-(8.36). En évaluant ces expressions en $\tilde{r} = 0$ et à l'aide de l'expression (8.50), on obtient les conditions sur $u_{C\theta}$:

$$u_{C\theta}(0, \tilde{\theta}) = -\frac{i\tilde{\theta}}{4}, \quad (8.56)$$

$$\frac{\partial^2 u_{C\theta}}{\partial \tilde{r}^2}(0, \tilde{\theta}) = \frac{\tilde{\theta}^3}{4}. \quad (8.57)$$

De plus, les composantes orthoradiale et azimutale du champ des vitesses tendent vers zéro de manière exponentielle quand $\tilde{r} \rightarrow +\infty$. Par conséquent, on a la condition supplémentaire :

$$u_{C\theta}(+\infty, \tilde{\theta}) = 0, \quad (8.58)$$

$$\frac{\partial u_{C\theta}}{\partial \tilde{r}}(+\infty, \tilde{\theta}) = 0. \quad (8.59)$$

L'axe de rotation correspond à $\tilde{\theta} = 0$. Par axisymétrie, la composante orthoradiale du champ des vitesses doit donc être nulle en $\tilde{\theta} = 0$, ce qui nous donne une première condition suivant la coordonnée $\tilde{\theta}$:

$$u_{C\theta}(\tilde{r}, 0) = 0. \quad (8.60)$$

Finalement, la seconde condition sur $\tilde{\theta}$ est obtenue par raccordement avec la solution dans la couche limite d'épaisseur $E^{1/2}$. A partir de la relation (8.28), évaluée avec les nouvelles variables \tilde{r} et $\tilde{\theta}$, on obtient que dans la limite $\tilde{\theta} \rightarrow +\infty$, on a

$$\lim_{\tilde{\theta} \rightarrow +\infty} u_{C\theta}(\tilde{r}, \tilde{\theta}) = -\frac{i\tilde{\theta}}{4} \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \tilde{\theta} \tilde{r}\right). \quad (8.61)$$

L'équation (8.55) doit alors être résolue numériquement avec les conditions (8.56)-(8.61). Malheureusement, nos essais en utilisant une méthode pseudo-spectrale se sont révélés infructueux. En effet, la solution est fortement oscillante. Une méthode de différence finies a été utilisée avec succès par Kida (2011) pour résoudre le problème dans le cas de la précession et devra vraisemblablement être utilisée dans le cas présent.

Notons que dans le cas d'un forçage temporel de fréquence ω couplé à une déformation de période azimutale m vérifiant $\omega + m = 2$, l'équation (8.55) s'écrit

$$\left(i \frac{\partial^4}{\partial \tilde{r}^4} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\theta}^2} + \frac{1}{\tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} - \frac{(1-m)^2}{\tilde{\theta}^2} + \tilde{\theta}^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} - 2\tilde{\theta} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r} \partial \tilde{\theta}} - 2 \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \right) u_{C\theta} = 0 \quad (8.62)$$

Le cas $m = 0$ redonnant bien l'équation (8.55).

8.3 Latitude critique à l'équateur

On considère maintenant un forçage de libration longitudinale à la fréquence $\omega = 0$. Cette situation est celle d'une sphère en libration dans la limite $\omega \ll 1$ considérée récemment par Busse (2010a). On s'intéresse alors à la latitude critique en $\theta_c = \pi/2$, i.e. au voisinage de l'équateur. La partie singulière du champ des vitesses et de pression est donnée par les relations (8.28)-(8.31). On introduit également de nouvelles échelles radiale et latitudinale par :

$$r = 1 - \tilde{r} E^p \quad \text{et} \quad \theta = \pi/2 - \tilde{\theta} E^q. \quad (8.63)$$

où p et q sont deux coefficients à déterminer tels que $(p, q) \in]0; 1/2[$. Au voisinage de l'équateur ($\theta_c = \pi/2$), la partie singulière du champ des vitesses (8.28)-(8.31) s'écrit :

$$u_{B\zeta}^S(\tilde{r}, \tilde{\theta}) = \frac{1+i}{16} \frac{E^{-3q/2}}{\tilde{\theta}^{3/2}} \left[1 - \exp\left(-(1+i)\sqrt{\tilde{\theta}}\tilde{r}E^{\frac{q}{2}+p-\frac{1}{2}}\right) \left(1 - \left(-(1+i)\sqrt{\tilde{\theta}}\tilde{r}E^{\frac{q}{2}+p-\frac{1}{2}}\right)\right) \right] - \frac{1+i}{4} E^{-q} \sqrt{\tilde{\theta}} \left[1 - \exp\left(-(1+i)\sqrt{\tilde{\theta}}\tilde{r}E^{\frac{q}{2}+p-\frac{1}{2}}\right) \right], \quad (8.64)$$

$$u_{B\theta}^S(\tilde{r}, \tilde{\theta}) = -\frac{i}{4} \left(1 - \frac{\tilde{\theta}^2 E^{2q}}{2}\right) \exp\left(-(1+i)\sqrt{\tilde{\theta}}\tilde{r}E^{\frac{q}{2}+p-\frac{1}{2}}\right), \quad (8.65)$$

$$u_{B\phi}^S(\tilde{r}, \tilde{\theta}) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\tilde{\theta}^2 E^{2q}}{2}\right) \exp\left(-(1+i)\sqrt{\tilde{\theta}}\tilde{r}E^{\frac{q}{2}+p-\frac{1}{2}}\right), \quad (8.66)$$

$$p_B^S(\tilde{r}, \tilde{\theta}) = \frac{(1-i)E^{-q/2}}{4\tilde{\theta}^{1/2}} \left[\exp\left(-(1+i)\sqrt{\tilde{\theta}}\tilde{r}E^{\frac{q}{2}+p-\frac{1}{2}}\right) - 1 \right]. \quad (8.67)$$

Pour que la partie singulière du champ des vitesses et de pression dépende à la fois de \tilde{r} et $\tilde{\theta}$, il faut ici que

$$p + \frac{q}{2} = \frac{1}{2} \quad (8.68)$$

Le scaling du champ des vitesses au voisinage de la latitude critique peut alors être estimé à partir de (8.10)-(8.14) et (8.64)-(8.67) comme étant :

$$u_r(r, \theta) = E^{1/2-3q/2} u_{C\zeta}(\tilde{r}, \tilde{\theta}), \quad (8.69)$$

$$u_\theta(r, \theta) = u_{C\theta}(\tilde{r}, \tilde{\theta}) + E^{2q} u_{C\theta}^{(1)}(\tilde{r}, \tilde{\theta}), \quad (8.70)$$

$$u_\phi(r, \theta) = u_{C\phi}(\tilde{r}, \tilde{\theta}) + E^{2q} u_{C\phi}^{(1)}(\tilde{r}, \tilde{\theta}), \quad (8.71)$$

$$p(r, \theta) = E^{1/2-q/2} p_C(\tilde{r}, \tilde{\theta}). \quad (8.72)$$

Avec ces scalings, l'équation de continuité (8.3) s'écrit :

$$E^{1/2-3q/2-p} \frac{\partial u_{C\zeta}}{\partial \tilde{r}} + E^{-q} \frac{\partial u_{C\theta}}{\partial \tilde{\theta}} = 0. \quad (8.73)$$

L'équation de Navier-Stokes avec les scalings (8.69)-(8.72) conduit aux relations :

$$-2\tilde{\theta} E^q u_{C\phi} + E^{1/2-q/2-p} \frac{\partial p_C}{\partial \tilde{r}} - E^{\frac{1}{2}-2p} \frac{\partial^2 u_{C\zeta}}{\partial \tilde{r}^2} + \dots = 0, \quad (8.74)$$

$$-2E^q \tilde{\theta} u_{C\phi} + E^{1/2-3q/2} \frac{\partial p_C}{\partial \tilde{\theta}} - E^{1-2p} \frac{\partial^2 u_{C\theta}}{\partial \tilde{r}^2} + \dots = 0, \quad (8.75)$$

$$2E^q \tilde{\theta} u_{C\theta} + 2E^{1/2-3q/2} u_{C\zeta} - E^{1-2p} \frac{\partial^2 u_{C\phi}}{\partial \tilde{r}^2} + \dots = 0. \quad (8.76)$$

La solution la plus générale possible est obtenue dans (8.75)-(8.76) lorsque les trois premiers termes sont du même ordre de grandeur, ce qui implique $q = 1/2 - 3q/2$, d'où finalement le scaling au voisinage de l'équateur :

$$p = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{5}. \quad (8.77)$$

Ainsi, le système d'équations déterminé à partir de ce scaling est

$$\frac{\partial u_{C\zeta}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial u_{C\theta}}{\partial \tilde{\theta}} = 0, \quad (8.78)$$

$$2 u_{C\phi} = \frac{\partial p_C}{\partial \tilde{r}}, \quad (8.79)$$

$$-2 \tilde{\theta} u_{C\phi} = \frac{\partial p_C}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial^2 u_{C\theta}}{\partial \tilde{r}^2}, \quad (8.80)$$

$$2 \tilde{\theta} u_{C\theta} + 2 u_{C\zeta} = \frac{\partial^2 u_{C\phi}}{\partial \tilde{r}^2}. \quad (8.81)$$

La combinaison des équations (8.78)-(8.81) permet alors d'obtenir une équation différentielle du sixième ordre pour $u_{C\theta}$:

$$\left(\frac{\partial^6}{\partial \tilde{r}^6} - 8 \tilde{\theta} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\theta} \partial \tilde{r}} + 4 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\theta}^2} - 4 \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + 4 \tilde{\theta}^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} \right) u_{C\theta} = 0 \quad (8.82)$$

Dans ce cas, il nous faudra deux conditions sur $\tilde{\theta}$ obtenues de manière similaire à la section précédente pour $\tilde{\theta} = 0$ et $\tilde{\theta} \rightarrow +\infty$. Par contre, six conditions sur \tilde{r} sont requises. Deux conditions pour $\tilde{r} = 0$ sont possibles et il nous faudra vérifier numériquement que 4 autres conditions sur $u_{C\theta}$ et ses dérivées par rapport à \tilde{r} pour $\tilde{r} \rightarrow +\infty$ sont suffisantes.

8.4 Latitude critique en $\theta_c \in]0; \pi/2[$

Finalement, le dernier cas où la latitude critique se situe en $\theta_c \in]0; \pi/2[$ se rapporte au cas de la précession, récemment traité par Kida (2011). Cette situation se ramène à un forçage de libration longitudinale de fréquence $\omega = 1$. Plus généralement, on peut considérer le cas où la fréquence de libration est comprise dans la gamme $]0; 2[$. Le raisonnement est alors identique à celui proposé par Stewartson & Roberts (1963) ou Kida (2011). Les nouvelles coordonnées s'écrivent

$$r = 1 - \tilde{r} E^{2/5} \quad \text{et} \quad \theta - \theta_c = \tilde{\theta} E^{1/5}. \quad (8.83)$$

Nous pouvons faire disparaître le paramètre θ_c des équations en posant

$$\tilde{r} = (\sin \theta_c)^{2/5} \hat{r} \quad \text{et} \quad \tilde{\theta} = (\sin \theta_c)^{-1/5} \hat{\theta}. \quad (8.84)$$

On obtient alors une équation d'ordre 3, similaire à celle obtenue par Kida (2011)

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial \hat{r}^3} - 2i \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} + 2i \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \right) u_{C\theta} = 0 \quad (8.85)$$

Nous renvoyons à l'article de Kida (2011) pour plus de détails sur ce dernier cas.

8.5 Conclusions et perspectives

Nous venons de confirmer dans ce chapitre que le cas d'un forçage de fréquence inférieure ou égale à 2 implique la présence d'une latitude critique. Cette latitude critique se situe à l'endroit où le champ des vitesses diverge dans la couche d'Ekman. Trois différents cas sont possibles, résumés dans le tableau 8.1 : une latitude critique aux pôles de la sphère, à son équateur ou partout ailleurs. Le dernier cas a été traité très récemment par Kida (2011) pour une sphère en précession. Le problème est maintenant de résoudre numériquement les équations avec les conditions aux limites obtenues. Notre méthode pseudo-spectrale s'est heurtée à de fortes instabilités numériques et nous espérons qu'une méthode par différences finies, comme employée par Kida (2011), sera suffisante pour régler ce problème.

La présence d'une latitude critique va avoir deux effets sur l'écoulement. Tout d'abord, un cylindre géostrophique, situé à la verticale de la latitude critique, modifiera l'écoulement dans le volume, comme montré numériquement par Noir *et al.* (2001) ou Tilgner & Busse (2001). La solution aux équations proposées dans ce chapitre pourrait alors permettre de régulariser la solution analytique de l'écoulement zonal qui diverge aux pôles (Suess, 1971), à l'équateur (Busse, 2010a) ou en $\theta_c = \pi/3$ dans le cas de la précession (Busse, 1968b). Dans ces zones, l'écoulement zonal devrait varier en $E^{-\alpha}$, avec $\alpha > 0$ (par exemple $\alpha = 3/10$ pour le cas de la précession (Kerswell, 1995; Noir *et al.*, 2001), sur une zone d'extension radiale d'ordre $E^{1/5}$). Puis, en plus de ces cylindres géostrophiques, les latitudes critiques vont générer des couches de cisaillement, de forme conique, se propageant dans le volume suivant un angle donné par la relation de dispersion des ondes inertielles et se réfléchissant sur les parois de la sphère. Au voisinage de ces zones, l'hypothèse d'écoulement non-visqueux en volume ne sera plus satisfaite. De plus, l'interaction de ces zones de cisaillement pourra générer un écoulement non-linéaire intense. Ces effets pourraient avoir une conséquence non-négligeable sur les écoulements planétaires à faible nombre de Ekman et feront l'objet de futures études. Pour finir, notons que les équations établies dans ce chapitre s'appliquent aussi bien au niveau de la sphère externe que sur un éventuel noyau interne (à un changement de signe de la coordonnée radiale près).

	$r = 1 - \tilde{r} E^p$	$\theta - \theta_c = \tilde{\theta}^q$
$\theta_c = 0$	$p = 1/3$	$q = 1/6$
$\theta_c \in]0; \pi/2[$	$p = 2/5$	$q = 1/5$
$\theta_c = \pi/2$	$p = 2/5$	$q = 1/5$

FIGURE 8.1 – Tableau récapitulatif des échelles radiales et orthoradiales dans les trois situations possibles.

Conclusions et Perspectives

Nothing before had ever made me thoroughly realise, though I had read various scientific books, that science consists in grouping facts so that general laws or conclusions may be drawn from them.

Charles Darwin

Sommaire du chapitre

9.1	Résumé de la thèse et applications planétaires	179
9.1.1	Vent zonal généré par les couches d'Ekman	179
9.1.2	Instabilité centrifuge et génération spontanée	180
9.1.3	Vent zonal généré par résonance de mode inertiel et instabilité de cisaillement	181
9.2	Perspectives	182

9.1 Résumé de la thèse et applications planétaires

Tout au long de cette thèse, nous nous sommes intéressés à la réponse du fluide dans un conteneur en rotation et soumis à un forçage harmonique. Deux forçages harmoniques ont été particulièrement étudiés durant cette thèse : la libration longitudinale, qui correspond à une oscillation de la vitesse angulaire du conteneur, et un forçage de marées, déformant le conteneur en un ellipsoïde. En combinant des approches analytique, numérique et expérimentale, nous avons pu montrer que ce forçage induit différents effets que nous avons présentés dans l'interlude. Nous résumons ici les principaux résultats.

9.1.1 Vent zonal généré par les couches d'Ekman

Le premier effet que l'on a étudié, est la génération d'un écoulement zonal, axisymétrique et stationnaire, induit par des interactions non-linéaires dans la couche limite. Ceci nous a permis d'étendre les travaux de [Busse \(1968b, 2010a\)](#) et [Suess \(1971\)](#). En effet, nous avons obtenu une expression analytique exacte de l'écoulement zonal pour une fréquence de libration arbitraire, en l'absence de latitude critique. De plus, nous avons considéré l'effet d'un noyau interne. Celui-ci est responsable de la présence de couches de Stewartson, même dans le cas où la vitesse angulaire de la paroi extérieure et celle du noyau sont identiques. Une étude expérimentale, menée à l'IRPHE, a permis de montrer que notre théorie décrit correctement l'écoulement non-linéaire observé pour des petites fréquences de libration. En nous appuyant sur des simulations

numériques dans une sphère et des résultats de [Calkins *et al.* \(2010\)](#), nous avons également prouvé que la théorie capture la dynamique de l'écoulement généré, pour des fréquences de libration supérieures à deux fois la vitesse angulaire de la coquille sphérique. L'écoulement dans les couches de Stewartson est également correctement reproduit. Ces résultats ont été étendus à diverses géométries : nous avons pu retrouver les résultats de [Wang \(1970\)](#) en géométrie cylindrique. De plus, il apparaît que cet écoulement capture correctement l'écoulement zonal dans un ellipsoïde en libration longitudinale, malgré la présence d'effets topographiques. Nous n'avons pas présenté ce résultat analytique dans ce manuscrit, mais il s'avère que cette théorie de couche limite permet également de décrire l'écoulement zonal généré par un forçage de libration latitudinale dans une sphère. Celui-ci possède une structure similaire au cas étudié dans cette thèse. La loi d'échelle de l'écoulement zonal dans le volume, $u_\phi \propto \varepsilon^2 E^0$, est une conséquence directe de notre calcul analytique. Mais plus qu'une simple loi d'échelle, nous avons obtenu l'expression exacte de la correction non-linéaire dans une coquille sphérique soumise à un forçage de libration longitudinale. L'écoulement, ainsi que la vorticité axiale, dans les couches de Stewartson ont été déterminé analytiquement. Un tel écoulement pourrait, a priori, générer une instabilité de cisaillement au niveau du cylindre tangent au noyau interne (e.g. [Schaeffer & Cardin, 2005](#)).

9.1.2 Instabilité centrifuge et génération spontanée

Toujours en considérant un forçage de libration longitudinale, nous avons considéré la possible présence d'une instabilité centrifuge, voire d'un écoulement turbulent, près de la paroi oscillante. L'étude analytique que nous avons menée en géométrie cylindrique a permis de réconcilier l'estimation du seuil de l'instabilité dans une sphère ([Noir *et al.*, 2009](#)) avec celle dans un cylindre ([Noir *et al.*, 2010](#)). De plus, nous avons montré que le seuil de l'instabilité dépend de la fréquence de libration ω et obtenu une valeur analytique de ce seuil. Par exemple, pour $\omega = 1$, qui est la fréquence de libration la plus fréquemment rencontrée dans les satellites du système solaire (voir annexe D), nous avons déterminé que l'instabilité centrifuge apparaît pour une amplitude critique ε_c qui dépend du nombre d'Ekman selon la loi

$$\varepsilon_c \simeq 46 E^{1/2}$$

Cette loi est en accord avec les résultats numériques de [Calkins *et al.* \(2010\)](#) obtenus en géométrie sphérique. Nous pouvons alors estimer si les couches fluides des planètes et des satellites du système solaire peuvent être instables vis-à-vis de cette instabilité. Pour cela, nous devons faire des hypothèses assez fortes : nous considérons le fluide comme newtonien et incompressible. De plus, nous négligeons les termes d'ordre supérieur en ε et la forme exacte de la réponse du fluide au forçage. Les effets thermiques ou de stratification sont également négligés. Malgré ces hypothèses très fortes, risquons-nous à étudier la stabilité de l'écoulement. Avec les données astrophysiques fournies en annexe D, nous pouvons estimer l'amplitude de libration à $\varepsilon \sim 10^{-4}$ et le nombre d'Ekman des satellites joviens   $E \sim 10^{-14}$. En utilisant la relation ci-dessus, nous représentons sur la figure 9.1 un diagramme de stabilité, en supposant que le critère obtenu soit valide aux échelles planétaires et dans les conditions réelles ([Noir *et al.*, 2009](#)). Les valeurs ont été estimées à l'aide des différents travaux cités en annexe D. Cette figure suggère que les océans subsurfaciques des satellites galiléens (Europe, Io, Ganymède) et les noyaux de Io et Mercure pourraient présenter une instabilité centrifuge ou une région turbulente (voir [Noir *et al.*, 2009](#)). Une telle instabilité, localisée au niveau de l' quateur, pourrait, a priori, ne pas avoir d'implication au niveau planétaire. Néanmoins, nous avons montré dans cette thèse qu'un écoulement turbulent localisé peut générer spontanément des ondes inertielles dont la fréquence

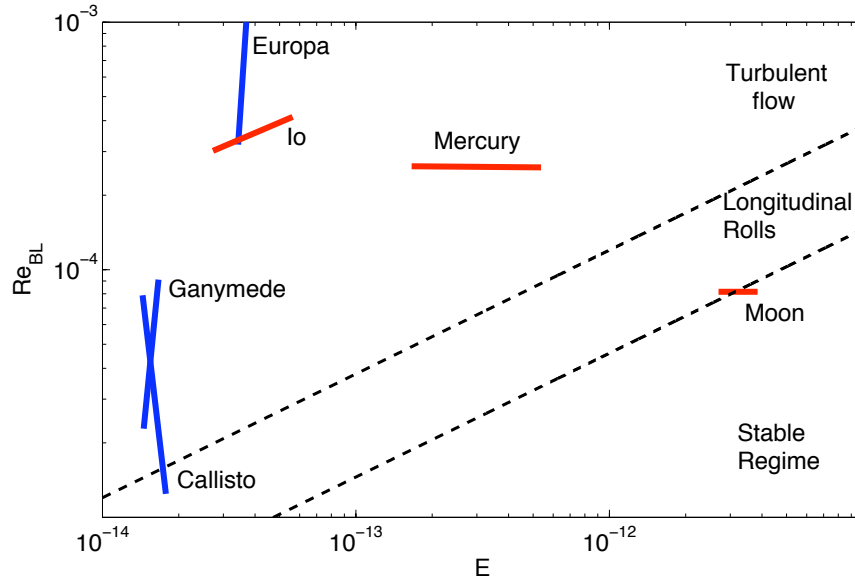


FIGURE 9.1 – Loi d’échelle de l’instabilité centrifuge et de l’écoulement turbulent généré en géométrie sphérique. La courbe du bas, en tirets noirs, est le seuil théorique d’apparition de l’instabilité centrifuge pour $\omega = 1$ déterminé théoriquement dans ce manuscrit : $\varepsilon_c = 46 E^{1/2}$. La courbe du haut, en tirets noirs, est le seuil d’apparition d’un écoulement turbulent déterminé expérimentalement par [Noir et al. \(2009\)](#) : $\varepsilon_{c,2} = 120 E^{1/2}$. Les traits représentent l’incertitude sur l’amplitude de libration ou le rayon des couches fluides. La couleur rouge indique les noyaux planétaires et la bleue les océans subsurfaciques.

et la propagation ont été caractérisées. Un tel mécanisme serait susceptible de transporter de la quantité de mouvement depuis ces zones turbulentes vers le volume du fluide. De plus, bien que ce mécanisme ait été présenté dans le cadre de cette instabilité centrifuge, le résultat obtenu est générique et présent pour n’importe quel écoulement turbulent localisé dans un écoulement en rotation.

9.1.3 Vent zonal généré par résonance de mode inertiel et instabilité de cisaillement

Finalement, nous nous sommes intéressés à l’influence des modes inertiels générés par un forçage harmonique. En utilisant un dispositif expérimental permettant de simuler des effets de marées sur un écoulement en rotation, nous avons pu étudier l’écoulement généré par un forçage résonant de modes inertiels. Des visualisations qualitatives nous ont permis de valider les travaux de [Morize et al. \(2010\)](#) : les modes excités correspondent à des modes propres $m = 2$ de la sphère. Nous avons alors pu déterminer la variation de l’écoulement zonal en fonction de l’amplitude de la déformation β et du nombre d’Ekman E . Un problème est apparu ici : les expériences de laboratoire n’atteignent pas des nombres d’Ekman suffisamment faibles pour décrire la tendance asymptotique de l’écoulement zonal. Aussi, deux lois d’échelles différentes ont été obtenues pour les deux modes propres que nous avons pu considérer. Dans les deux cas, l’écoulement généré se met sous la forme

$$u_\phi \propto \beta^2 E^{-\alpha} \text{ avec } \alpha = O(1)$$

Ce résultat est particulièrement intéressant, car au niveau planétaire, la faible valeur du nombre d'Ekman permet de compenser la faible valeur de l'amplitude de déformation β . De plus, quand le nombre d'Ekman devient très petit, un grand nombre de modes propres peut être excité (voir par exemple Greenspan, 1968). Par conséquent, n'importe quelle fréquence de forçage est susceptible d'exciter un mode propre lorsque le nombre d'Ekman devient inférieur à 10^{-12} . Nous pouvons essayer d'appliquer la loi d'échelle déterminée expérimentalement pour un des modes ($\Omega_R = 0,384$) qui s'écrit $2 \times 10^{-3} \beta^2 E^{-0.64}$.¹ Une telle loi d'échelle générerait des écoulements de l'ordre d'un mètre par seconde dans l'océan subsurfacique d'Europe et de 34 m.s^{-1} dans le noyau interne de Io! Cette contribution n'est donc pas totalement négligeable. En pratique, nous avons pu mettre en évidence expérimentalement qu'une instabilité de cisaillement apparaît quand cet écoulement zonal devient trop intense. A partir de mesures expérimentales permettant de déterminer le seuil d'apparition de cette instabilité de cisaillement, et en utilisant des arguments basés sur des lois d'échelles, nous avons pu montrer que cet écoulement local va se déstabiliser, dans notre dispositif expérimental et pour le mode $\Omega_R = 0,384$, pour une amplitude critique donnée par :

$$\beta_c = 167,3 E^{0,72}.$$

Estimons alors les conséquences qu'auraient une telle loi d'échelle au niveau planétaire, en supposant que la présence possible d'un noyau interne soit négligeable. Cette loi a été représentée sur la figure 9.2 où nous avons rajouté la stabilité des planètes et satellites vis-à-vis de cette instabilité. Même si la loi d'échelle de l'écoulement zonal peut changer, ce mécanisme pourrait clairement apparaître dans différents satellites, tels que Io ou dans les océans subsurfaciques de Europe, Ganymède ou Callisto. La présence de cette instabilité pourrait générer un écoulement turbulent. Malheureusement, il est fort probable que la loi d'échelle de l'écoulement zonal que nous avons utilisée ne soit pas directement valide car les expériences de laboratoire, menées pour $E \sim 10^{-5}$ ne permettent pas d'atteindre un écoulement asymptotique. Par contre, nous avons discuté au chapitre 7 des résultats obtenus par Tilgner (2007), dans une coquille sphérique, qui semblent montrer un comportement asymptotique. Dans ce cas, la loi d'échelle décrivant le seuil d'instabilité est de la forme $\beta_c \propto E^{0,7083}$ qui est proche de la loi d'échelle trouvée expérimentalement. Même si la présence d'un noyau est susceptible de générer des cisaillements plus importants, ces deux critères sont du même ordre de grandeur. Aussi, nous avons tout lieu de supposer qu'une telle instabilité peut être présente dans de nombreux corps astrophysiques possédant des couches fluides.

Pour finir, nous avons montré que lorsque la fréquence du forçage harmonique est inférieure à deux fois la fréquence de rotation de la sphère, les équations classiques dans la couche d'Ekman ne s'appliquent plus. Au lieu de ça, de nouvelles lois d'échelles doivent être considérées. Nous avons pu mettre en équation les trois situations génériques : le cas d'une latitude critique à l'équateur, aux pôles ou partout ailleurs. Ce dernier cas est à rapprocher au forçage de précession qui a récemment été considéré par Kida (2011).

9.2 Perspectives

Bien entendu, l'étude des forçages harmoniques est loin d'être close. Deux points vont être traités dans un futur proche. Dans un premier temps, pouvoir quantifier, par mesure PIV, l'écoulement zonal dans le cas d'une coquille sphérique permettrait d'étendre les résultats présentés

1. Ce préfacteur a été déterminé à l'aide des expériences menées au chapitre 7 (voir la courbe correspondant à $\Omega_R = 0,384$ sur la figure 7.14)

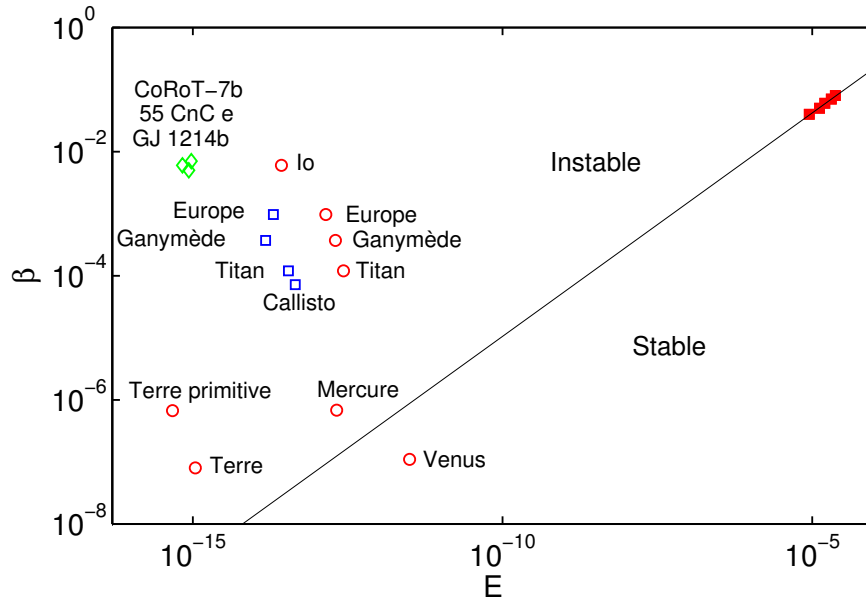


FIGURE 9.2 – Stabilité des écoulements zonaux générés dans les noyaux de quelques planètes et satellites (en rouge), dans les océans subsurfaciques (en bleu) et dans des exoplanètes (en vert). Les carrés rouges sont les résultats expérimentaux et la courbe noire sépare la région stable de la région instable.

dans cette thèse. Au vu des premières expériences effectuées au laboratoire, cet écoulement zonal est encore plus intense que dans la sphère. Ces expériences montrent également que les modes que nous pouvons exciter dans notre dispositif expérimental ont une fréquence légèrement différente des modes de la sphère, mais la structure des ondes inertielles est clairement visible. Un second point très intéressant est la résolution numérique des équations présentées dans le chapitre 8 au niveau des latitudes critiques. Notre méthode pseudo-spectrale s’est heurtée à une grande instabilité de la solution. Au vu de la méthode employée par [Kida \(2011\)](#), nous allons essayer de résoudre ces équations par une méthode de différences finies.

Au-delà de ces deux études actuellement en cours, différents points restent à éclaircir. Les océans subsurfaciques sont stratifiés : il est donc légitime de se demander si les lois d’échelles présentées ici s’appliquent toujours pour des ondes gravito-inertielles. Une étude numérique de libration, similaire à celle effectuée par [Calkins et al. \(2010\)](#), en ajoutant des effets de stratification, pourrait répondre à cette question. L’instabilité de cisaillement, étudiée dans ce manuscrit, est suspectée s’appliquer à tout type de forçage harmonique. Les expériences de [Vanyo et al. \(1995\)](#) semblent montrer que cet effet est également présent pour un forçage de précession. Une étude expérimentale avec un forçage de libration longitudinale permettrait de confirmer que ce phénomène est générique. Les planètes étant soumises à différents types de forçage, les effets pourraient se combiner et conduire à des écoulements encore plus importants. Le phénomène de génération spontanée reste encore à éclaircir, en particulier des mesures expérimentales de l’amplitude des ondes générées permettrait de quantifier l’importance de ce phénomène. Pour s’approcher au plus près des situations planétaires, où le fluide est en rotation et stratifié, des expériences de génération de ces ondes dans un fluide stratifié-tournant se rapprocheraient davantage de la situation réelle.

Au niveau théorique, l’étude menée dans cette thèse ouvre la porte à de nombreuses questions et différents axes de recherches. Le premier point sera, comme nous l’avons dit ci-dessus, de finir

la résolution des singularités des couches visqueuses au voisinage des latitudes critiques mais aussi de considérer les couches de cisaillement internes émises au niveau de ces latitudes. Une fois ceci obtenu, un autre grand enjeu sera de décrire le mécanisme de résonance de modes inertiels et notamment l'amplification de la réponse du fluide pour un forçage correspondant à un mode propre du conteneur. Ceci conduit à une nouvelle problématique à résoudre : la description des modes propres dans une coquille sphérique, i.e. en présence d'un noyau, qui sont à l'heure actuelle mal compris (e.g. [Rieutord & Valdettaro, 2010](#)). Une situation plus complexe sera alors de considérer la présence des latitudes critiques au niveau du noyau interne. Dans ce cas, la forme de la paroi est convexe, et non concave, conduisant à des échelles différentes (voir par exemple [Kerswell, 1995](#)) et de nouvelles équations intéressantes à étudier. Pour finir, nous avons montré dans cette thèse que les mécanismes non-linéaires peuvent être important par rapport à l'écoulement total, un enjeu important dans l'estimation des écoulements planétaires, et tout aussi intéressant au niveau fondamental, sera d'analyser théoriquement le mécanisme de génération de l'écoulement zonal en présence de latitudes critiques avec ou sans résonance de modes inertiels (e.g. [Noir *et al.*, 2001](#)).

En conclusion de ce manuscrit, nous avons montré l'importance que peuvent revêtir les forçages harmoniques dans les écoulements en rotation. Les hypothèses actuelles de génération de champ magnétique sont majoritairement basées sur des effets de convection. Néanmoins, les effets purement mécaniques pourraient apporter une contribution non-négligeable à cet écoulement total. L'étude des données de futures missions spatiales, à la lumière d'études de plus en plus précises de mécanique des fluides, permettra sans doute dans un proche futur de mieux quantifier cette contribution.

Annexes

Compléments au chapitre 3

1 Expressions du chapitre 3

1.1 Expressions des coefficients A_l , B_l , C_l et D_l

Les coefficients A_l , B_l , C_l et D_l apparaissant dans les expressions (3.26.a) et (3.26.b) du chapitre 3 ont pour expressions :

$$A_1 = \frac{\sin^2 \theta}{16 s_-^3 s_+^3} \left[4 s_-^2 (s_- + i s_+)^2 s_+^2 \cos^2 \theta + (s_+^6 - s_-^6 + s_-^4 s_+^2 - 4i s_-^3 s_+^3 - s_-^2 s_+^4) \sin^2 \theta + \cos \theta \left((s_-^4 + s_+^4) \sin^2 \theta - 4 s_-^2 s_+^2 (s_-^2 + s_+^2)^2 \right) \right], \quad (\text{A.1})$$

$$B_1 = -\frac{(1-i)}{16 s_-^2 s_+^2} (s_-^2 + s_+^2) (s_- + i s_+) \left[(s_- - i s_+)^2 - \cos \theta \right] \sin^4 \theta, \quad (\text{A.2})$$

$$A_2 = \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{16 s_+^2} (\sin^2 \theta + 4 s_+^2 \cos \theta), \quad (\text{A.3})$$

$$A_3 = \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{16 s_-^2} (\sin^2 \theta - 4 s_-^2 \cos \theta), \quad (\text{A.4})$$

$$A_4 = -\frac{\sin^2 \theta}{16 s_-^3 s_+^2} (s_+^2 + \cos \theta) \left[4 \cos \theta (s_- - s_+) s_+^2 s_-^2 + \sin^2 \theta (s_+^3 + s_-^3) \right], \quad (\text{A.5})$$

$$A_5 = \frac{\sin^2 \theta}{16 s_-^2 s_+^3} (s_-^2 - \cos \theta) \left[4 \cos \theta (s_- - s_+) s_+^2 s_-^2 + \sin^2 \theta (s_+^3 + s_-^3) \right], \quad (\text{A.6})$$

$$B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$C_1 = \frac{(1-i) \sin^2 \theta}{32 s_-^3 s_+^3} \left[(s_-^5 - s_-^3 s_+^2 - i s_-^2 s_+^3 + i s_+^5) \sin^2 \theta + 4 s_-^2 (s_- - i s_+) (s_-^2 + s_+^2) s_+^2 \cos \theta \right], \quad (\text{A.8})$$

$$D_1 = \frac{i \sin^4 \theta}{16 s_-^2 s_+^2} (s_+^2 + s_-^2)^2, \quad (\text{A.9})$$

$$C_4 = \frac{(1-i) \sin^2 \theta}{32 s_-^3 s_+} \left[4 \cos \theta (s_- - s_+) s_+^2 s_-^2 + \sin^2 \theta (s_+^3 + s_-^3) \right], \quad (\text{A.10})$$

$$C_5 = -\frac{(1-i) \sin^2 \theta}{32 s_+^3 s_-} \left[4 \cos \theta (s_- - s_+) s_+^2 s_-^2 + \sin^2 \theta (s_+^3 + s_-^3) \right], \quad (\text{A.11})$$

$$C_2 = D_2 = C_3 = D_3 = D_4 = D_5 = 0. \quad (\text{A.12})$$

où les coefficients s_+ et s_- sont définis par :

$$s_+ = \sqrt{\frac{\omega}{2} + \cos \theta} \quad \text{et} \quad s_- = \sqrt{\frac{\omega}{2} - \cos \theta}. \quad (\text{A.13})$$

1.2 Expression de la fonction $\mathcal{F}(\rho; \omega)$

Pour une fréquence de libration longitudinale $\omega > 2$, l'expression suivante de la fonction $\mathcal{F}(\rho; \omega)$, avec $\rho = \sin \theta$, s'applique :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\sin \theta; \omega) = & \left[\frac{(s_+^3 + s_-^3) \sin^4 \theta}{32 s_+^2 s_-^2} + \frac{(s_- - s_+) \cos \theta \sin^2 \theta}{8} \right] \left[\frac{s_+ - \sqrt{\cos \theta}}{s_+^2 + \cos \theta} - \frac{s_- - \sqrt{\cos \theta}}{s_-^2 - \cos \theta} \right] \\ & + \frac{\sin^2 \theta (s_+ + \sqrt{\cos \theta})}{32 s_+^3 (\cos^2 \theta + 4 s_+^4)} (2 s_+^2 - 2 s_+ \sqrt{\cos \theta} + \cos \theta) (\sin^2 \theta + 4 s_+^2 \cos \theta) \\ & + \frac{\sin^2 \theta (s_- + \sqrt{\cos \theta})}{32 s_-^3 (\cos^2 \theta + 4 s_-^4)} (2 s_-^2 - 2 s_- \sqrt{\cos \theta} + \cos \theta) (\sin^2 \theta - 4 s_-^2 \cos \theta) \\ & - \frac{\sin^2 \theta}{32 s_-^3 s_+^3 (s_-^2 + s_+^2) [s_-^2 + s_+^2 + 2 s_+ \sqrt{\cos \theta} + \cos \theta]^2} \\ & \left[(s_-^2 + s_+^2) [s_-^6 + 7 s_+^2 s_-^4 + 8 s_-^7 s_+^3 - 7 s_-^2 s_+^4 + 16 s_-^5 s_+^5 \right. \\ & - s_+^6 + 4 s_+^3 s_-^3 (-3 + 2 s_+^4)] + [4 s_-^6 s_+ - s_-^4 s_+^3 - 16 s_-^2 s_+^5 - 3 s_+^7 \\ & + 4 s_-^5 s_+^2 (-3 + 16 s_+^4) + s_+^4 s_-^3 (-19 + 32 s_+^4) + s_-^7 (-1 + 32 s_+^4)] \sqrt{\cos \theta} \\ & + [4 s_-^8 s_+^2 - 3 s_+^6 + s_-^6 (1 - 20 s_+^4) + s_-^2 s_+^4 (-11 + 4 s_+^4) \\ & + 4 s_+^3 s_-^3 (-3 + 16 s_+^4) + s_-^5 (-4 s_+ + 64 s_+^5) + s_-^4 (s_+^2 - 20 s_+^6)] \cos \theta \\ & - [4 s_-^7 s_+^2 + 4 s_-^6 s_+^3 + s_+^5 + 56 s_-^4 s_+^5 + s_-^3 s_+^2 (3 - 76 s_+^4) \\ & + s_-^5 (1 - 8 s_+^4) + 3 s_+^3 s_-^2 (1 - 4 s_+^4)] \cos^{3/2} \theta \\ & + [-s_-^8 - 4 s_-^6 s_+^2 - 4 s_+^3 s_-^5 - 48 s_-^4 s_+^4 + 60 s_+^5 s_-^3 + 20 s_-^2 s_+^6 + s_+^8] \cos^2 \theta \\ & + [s_-^7 - 4 s_-^6 s_+ + 8 s_-^5 s_+^2 - 11 s_-^4 s_+^3 + 31 s_+^4 s_-^3 + 20 s_-^2 s_+^5 + 3 s_+^7] \cos^{5/2} \theta \\ & + [-s_-^6 + 4 s_-^5 s_+ - s_+^2 s_-^4 + 12 s_+^3 s_-^3 + 11 s_-^2 s_+^4 + 3 s_+^6] \cos^3 \theta \\ & \left. + (s_-^5 + 3 s_-^3 s_+^2 + 3 s_+^3 s_-^2 + s_+^5) \cos^{7/2} \theta \right] \\ & + \frac{\sin^2 \theta}{4}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

La définition des coefficients s_+ et s_- reste inchangée :

$$s_+ = \sqrt{\frac{\omega}{2} + \cos \theta} \quad \text{et} \quad s_- = \sqrt{\frac{\omega}{2} - \cos \theta}. \quad (\text{A.15})$$

Dans le cas où la fréquence de libration longitudinale ω est inférieure à deux, l'expression (A.14) s'applique pour $\rho > \rho_c = \sqrt{1 - \omega^2/4}$. Par contre, pour $\rho < \rho_c$, nous devons utiliser

l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(\sin \theta; \omega) = & \frac{\sin^2 \theta}{32} \left[8 + \frac{(l_+ + \sqrt{\cos \theta})(4l_+^2 \cos \theta + \sin^2 \theta)}{l_+^3 (2l_+^2 + 2l_+ \sqrt{\cos \theta} + \cos \theta)} + \frac{(l_- + \sqrt{\cos \theta})(4l_-^2 \cos \theta + \sin^2 \theta)}{l_-^3 (2l_-^2 + 2l_- \sqrt{\cos \theta} + \cos \theta)} \right. \\
 & - \frac{4(l_-^3 + l_-^2 \sqrt{\cos \theta} + (l_- + l_+) \cos \theta)}{l_+ l_- (l_- + \sqrt{\cos \theta})} + \frac{l_-^4 \sin^2 \theta (l_- + \sqrt{\cos \theta} + (l_+^3 + l_-^3)/l_-^4 \cos \theta)}{\cos \theta l_+^3 l_-^3 (l_- + \sqrt{\cos \theta})} \\
 & - \frac{4(l_+^3 + l_+^2 \sqrt{\cos \theta} + (l_+ + l_-) \cos \theta)}{l_- l_+ (l_+ + \sqrt{\cos \theta})} + \frac{l_+^4 \sin^2 \theta (l_+ + \sqrt{\cos \theta} + (l_-^3 + l_+^3)/l_+^4 \cos \theta)}{\cos \theta l_-^3 l_+^3 (l_+ + \sqrt{\cos \theta})} \\
 & + \frac{1}{\cos \theta l_-^3 l_+^3 (l_- + l_+) (l_- + l_+ + \sqrt{\cos \theta})^2} \\
 & \left(4l_-^2 l_+^2 (l_- - l_+)^2 \cos^{5/2} \theta [1 + 2(l_- + l_+) \sqrt{\cos \theta}] \right. \\
 & + \cos \theta [l_- l_+ (l_- + l_+) (2(2l_-^2 - 3l_- l_+ + 2l_+^2) \sin^2 \theta + 4l_-^5 l_+ - 8l_-^3 l_+^3 + 4l_- l_+^5) \\
 & + 2(l_-^5 + l_+^5) \sin^2 \theta] + (l_- + l_+)^2 (l_-^4 + l_+^4) \sin^2 \theta [(l_- + l_+) + 2\sqrt{\cos \theta}] \\
 & \left. \left. + \cos^{3/2} \theta [8l_+^2 l_-^2 (l_-^2 - l_+^2)^2 + (l_-^4 + l_+^4 + l_- l_+ (l_- - l_+)^2) \sin^2 \theta] \right) \right]. \quad (\text{A.16})
 \end{aligned}$$

Ici, les coefficients l_+ et l_- sont définis par

$$l_+ = \sqrt{\cos \theta + \frac{\omega}{2}} \quad \text{et} \quad l_- = \sqrt{\cos \theta - \frac{\omega}{2}}. \quad (\text{A.17})$$

2 Solution dans les couches de Stewartson

Dans cette section, nous présentons les solutions utilisées au chapitre 3 dans les différentes couches de Stewartson au voisinage du cylindre tangent au noyau interne, situé en $\rho = a$. Cette analyse suit principalement le calcul effectué par Stewartson (1966) dans le cas de deux sphères concentriques en rotation à des vitesses angulaires différentes. Dans toutes les couches, les fonctions ψ_2 et χ_2 sont reliées, à l'ordre dominant en Ekman, par le même système d'équations que l'on écrit en coordonnées cylindriques sous la forme

$$2 \frac{\partial \chi_2}{\partial z} = E \frac{\partial^4 \psi_2}{\partial \rho^4}, \quad (\text{A.18a})$$

$$-2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = E \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \rho^2}, \quad (\text{A.18b})$$

où ρ et z sont les coordonnées cylindrico-polaires radiale et axiale. Dans les deux couches externes (voir figure 3.6), la fonction χ_2 demeure, à l'ordre dominant en E , indépendante de la coordonnée axiale z , de telle sorte qu'une relation simple existe entre ψ_2 et χ_2 . Cette relation s'obtient en intégrant (A.18b) par rapport à z :

$$\psi_2(\rho, z) = -E \frac{z}{2} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \rho^2} + B(\rho) \quad (\text{A.19})$$

où $B(\rho)$ est une fonction à déterminer dans chaque couche externe.

2.1 Couche externe $\rho > a$ de largeur $E^{1/4}$

Dans la couche externe à droite du cylindre tangent, $\rho > a$, d'épaisseur $E^{1/4}$, la fonction ψ_2 doit être antisymétrique par rapport à l'équateur situé en $z = 0$. Ceci implique que la fonction B est nulle dans cette couche : $B(\rho) = 0$. Une seconde relation est ensuite obtenue en considérant le problème dans la couche visqueuse au voisinage de la paroi de la sphère extérieure, en $z = \sqrt{1 - a^2}$. Dans cette zone, une relation entre ψ_2 et χ_2 est déduite de la relation (3.33) au voisinage de $\sin \theta = a$:

$$\chi_2(\rho) = -2(1 - a^2)^{1/4} E^{-1/2} \psi_2(\rho, \sqrt{1 - a^2}) + \mathcal{F}(a; \omega). \quad (\text{A.20})$$

La relation (A.19), évaluée en $z = \sqrt{1 - a^2}$, permet d'obtenir une équation différentielle pour la fonction χ_2 :

$$\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \rho^2} - \frac{\chi_2 - \mathcal{F}(a; \omega)}{E^{1/2} (1 - a^2)^{3/4}} = 0, \quad (\text{A.21})$$

qui a pour solution

$$\chi_2(\rho) = \mathcal{F}(a; \omega) - \Lambda_1 \exp \left[-\frac{(\rho - a) E^{-1/4}}{(1 - a^2)^{3/8}} \right]. \quad (\text{A.22})$$

À ce niveau, la constante Λ_1 est, a priori, inconnue. Nous allons voir dans la suite que nous obtenons à l'ordre dominant en Ekman :

$$\Lambda_1(a; \omega) = \delta \mathcal{X} = \mathcal{X}^+ - \mathcal{X}^- = \mathcal{F}(a; \omega) - \frac{\alpha^2 a^2}{4 \omega^2}. \quad (\text{A.23})$$

Dans cette couche, la vorticité axiale est donnée par

$$\omega_{z_2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi_2}{\partial \rho} = E^{-1/4} \frac{\delta \mathcal{X}(a; \omega)}{a (1 - a^2)^{3/8}} \exp \left[-\frac{(\rho - a) E^{-1/4}}{(1 - a^2)^{3/8}} \right], \quad (\text{A.24})$$

tandis que la fonction ψ_2 est obtenue avec la relation (A.19) en prenant $B(\rho) = 0$:

$$\psi_2(\rho, z) = E^{1/2} \frac{z}{2} \frac{\delta \mathcal{X}(a; \omega)}{(1 - a^2)^{3/4}} \exp \left[-\frac{(\rho - a)}{(1 - a^2)^{3/8} E^{1/4}} \right]. \quad (\text{A.25})$$

2.2 Couche externe $\rho < a$ de largeur $E^{2/7}$

La solution dans la couche externe à gauche du cylindre tangent, $\rho < a$, d'épaisseur $E^{2/7}$, est obtenue en considérant le problème au voisinage des deux parois (noyau interne en $z = 0$ et sphère extérieure en $z = \sqrt{1 - a^2}$). Au voisinage du noyau interne, $z = 0$, on obtient une relation entre ψ_2 et χ_2 en utilisant l'expression (3.35) :

$$\chi_2(\rho) = 2 \left[1 - \left(\frac{\rho}{a} \right)^2 \right]^{1/4} E^{-1/2} \psi_2(\rho, 0) + \frac{\alpha^2 a^2}{4 \omega^2}. \quad (\text{A.26})$$

La relation (A.19) appliquée en $z = 0$ permet d'obtenir l'expression de $B(\rho)$ dans cette couche :

$$B(\rho) = \frac{\chi_2(\rho) - \alpha^2 a^2 / (4 \omega^2)}{2 [1 - (\rho/a)^2]^{1/4}} E^{1/2}. \quad (\text{A.27})$$

En utilisant la relation (3.33), et en appliquant l'équation (A.19) au voisinage de $z = \sqrt{1-a^2}$ avec la relation (A.27), nous obtenons une équation différentielle pour χ_2 dans cette couche :

$$\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \rho^2} - \frac{\chi_2 - \mathcal{F}(a)}{(1-a^2)^{3/4} E^{1/2}} - \frac{\chi_2 - \alpha^2 a^2 / (4\omega^2)}{[2(a-\rho)]^{1/4}} \frac{a^{1/4}}{E^{1/2} \sqrt{1-a^2}} = 0. \quad (\text{A.28})$$

Cette équation différentielle admet pour solution

$$\chi_2(\rho) = \frac{\alpha^2 a^2}{4\omega} + E^{1/28} \Lambda_2 \mathbf{f}(\bar{\rho}) + O(E^{1/14}), \quad (\text{A.29})$$

où on a défini une variable dans la couche externe $\rho < a$ par

$$\bar{\rho} = (a - \rho) \left[\frac{a}{2 E^2 (1-a^2)^2} \right]^{1/7}, \quad (\text{A.30})$$

et

$$\Lambda_2(a; \omega) = - \left(\frac{2}{a} \right)^{1/7} \frac{(1-a^2)^{-5/56}}{\mathbf{f}'(0)} \delta \mathcal{X}(a; \omega). \quad (\text{A.31})$$

La fonction $\mathbf{f}(s)$ vérifie

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial s^2} - \frac{\mathbf{f}}{s^{1/4}} = 0, \quad \mathbf{f}(0) = 1, \quad \mathbf{f}(\infty) = 0. \quad (\text{A.32})$$

Une expression explicite de $\mathbf{f}(s)$ est donnée par

$$\mathbf{f}(s) = \frac{2 (4/7)^{11/7} s^{1/2} \mathbf{K}_{4/7} (8/7 s^{7/8})}{\Gamma(11/7)}, \quad (\text{A.33})$$

où \mathbf{K}_ν est la fonction de Bessel modifiée d'ordre ν et $\Gamma(z)$ est la fonction Gamma (voir Abramowitz & Stegun, 1965). On peut noter que $\mathbf{f}'(0) = -(4/7)^{8/7} \Gamma(3/7)/\Gamma(11/7) \approx -1,2246$.

Les expressions (A.23) et (A.31) pour Λ_1 et Λ_2 sont tels que χ_2 et $\partial_\rho \chi_2$, obtenues à partir de (A.20) et (A.26) pour respectivement $\rho > a$ et $\rho < a$, sont continues en $\rho = a$. Comme l'a montré Stewartson (1966), cette condition de continuité provient de la condition de raccordement de la solution dans la couche interne. Ceci garanti la continuité de la vorticité axiale qui est donnée dans la couche externe $\rho < a$ par

$$\omega_{z_2} = E^{-1/4} \frac{\Lambda_2}{2^{1/7} a^{6/7} (1-a^2)^{2/7}} \mathbf{f}'(\bar{\rho}) \quad (\text{A.34})$$

En utilisant les relations (A.19), (A.27), (A.28) and (A.29), une expression de ψ_2 peut également être obtenue :

$$\psi_2 \sim E^{13/28} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{1-a^2}} \right) \frac{\Lambda_2}{2^{9/7} a^{-2/7} (1-a^2)^{1/14}} \frac{\mathbf{f}(\bar{\rho})}{\bar{\rho}^{1/4}}. \quad (\text{A.35})$$

2.3 Couche interne d'épaisseur $E^{1/3}$

Dans la couche interne, la fonction χ_2 est constante et égale à $\alpha^2 a^2 / (4\omega^2)$. A l'opposé, la fonction ψ_2 a une structure plus complexe. Comme démontré par Stewartson (1966), dans la couche interne cette fonction est d'ordre $\psi_2 = O(E^{19/42})$. Plus précisément on peut écrire l'écrire sous la forme

$$\psi_2 \sim E^{19/42} \Lambda_3(a; \omega) \mathbf{I}(R, Z), \quad (\text{A.36})$$

où on a introduit les variables

$$R = \frac{(\rho - a)}{(1 - a^2)^{1/6} E^{1/3}}, \quad (\text{A.37a})$$

$$Z = \frac{z}{\sqrt{1 - a^2}}. \quad (\text{A.37b})$$

La fonction $\mathbf{I}(R, Z)$ doit alors vérifier l'équation différentielle

$$\frac{\partial^6 \mathbf{I}}{\partial R^6} + 4 \frac{\partial^2 \mathbf{I}}{\partial Z^2} = 0, \quad (\text{A.38})$$

avec les conditions aux limites

$$(-2R)^{1/4} \mathbf{I} \sim 1 \text{ pour } Z \rightarrow 0 \text{ avec } R < 0, \quad (\text{A.39a})$$

$$(-2R)^{1/4} \mathbf{I} \sim (1 - Z) \text{ quand } R \rightarrow -\infty, \quad (\text{A.39b})$$

$$\mathbf{I}(R, Z = 1) = 0, \quad (\text{A.39c})$$

$$\mathbf{I}(R, Z = 0) = 0 \text{ for } R > 0, \quad (\text{A.39d})$$

$$\mathbf{I} \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty. \quad (\text{A.39e})$$

Une forme intégrale de $\mathbf{I}(R, Z)$ peut être obtenue à partir de la relation (A.38) en utilisant des transformées de Fourier

$$\mathbf{I}(R, Z) = \frac{\Gamma(3/4)}{2^{1/4} \pi} \int_0^\infty \frac{\sinh[k^3(1 - Z)/2]}{\sinh(k^3/2)} \frac{\cos(kR + 3\pi/8)}{k^{3/4}} dk. \quad (\text{A.40})$$

La dépendance de ψ_2 par rapport à la fréquence de libration ω apparaît uniquement au niveau de la fonction Λ_3 qui s'écrit

$$\Lambda_3(a; \omega) = -\frac{a^{3/28}}{2^{6/7} \mathbf{f}'(0) (1 - a^2)^{11/84}} \delta \mathcal{X}(a; \omega). \quad (\text{A.41})$$

L'écoulement axial u_{z2} peut être déduit dans la couche interne à partir de l'expression de ψ_2 :

$$u_{z2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi_2}{\partial \rho}. \quad (\text{A.42})$$

On obtient alors

$$u_{z2} \sim E^{5/12} \Lambda_4(a; \omega) \mathbf{J}(R, Z), \quad (\text{A.43})$$

avec

$$\Lambda_4(a; \omega) = \frac{\Lambda_3(a; \omega)}{a(1 - a^2)^{1/6}} = -\frac{\delta \mathcal{X}(a; \omega)}{2^{6/7} \mathbf{f}'(0) a^{25/28} (1 - a^2)^{25/84}}, \quad (\text{A.44})$$

où la fonction $\mathbf{J}(R, Z)$ a pour expression

$$\mathbf{J}(R, Z) = \frac{\Gamma(3/4)}{2^{1/4} \pi} \int_0^\infty \frac{\sinh[k^3(1 - Z)/2]}{\sinh(k^3/2)} \cos(\pi/8 - kR) k^{1/4} dk. \quad (\text{A.45})$$

Pour comparer la solution analytique obtenue avec les résultats numériques dans la coquille sphérique, nous utilisons les termes d'ordre dominant, mais également les approximations à l'ordre suivant. En effet, les valeurs du nombre d'Ekman accessibles dans les simulations numériques restent modérées : $E \sim 10^{-6} - 10^{-4}$. L'approximation au second ordre peut être obtenue en considérant la correction d'ordre $O(E^{1/28})$ à \mathcal{X}^- déduite de la relation (A.29) :

$$\mathcal{X}^- = \frac{\alpha^2 a^2}{4\omega^2} + E^{1/28} \Lambda_2 \mathbf{f}(0). \quad (\text{A.46})$$

Ceci nous permet d'obtenir une nouvelle expression pour $\delta\mathcal{X}$:

$$\delta\mathcal{X} = \frac{\mathcal{F}(a;\omega) - \alpha^2 a^2 / (4\omega^2)}{1 + \zeta E^{1/28}}, \quad (\text{A.47})$$

avec

$$\zeta = - \left(\frac{2}{a} \right)^{1/7} \frac{(1 - a^2)^{-5/56} \mathbf{f}(0)}{\mathbf{f}'(0)}. \quad (\text{A.48})$$

Si nous utilisons alors la relation (A.47) dans les expressions (A.23), (A.31), (A.41) et (A.44) pour les coefficients $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$, on obtient des corrections valides à l'ordre $O(E^{1/14})$. C'est cette approximation du second ordre que l'on utilise dans les comparaisons avec les simulations numériques présentées au chapitre 4.

Analogie entre forçage temporel et forçage azimutal

Dans cette annexe, nous déterminons analytiquement l'écoulement non-linéaire, stationnaire et axisymétrique généré par un forçage multipolaire en géométrie cylindrique (voir section 4.3).

1 Formulation mathématique

Considérons l'écoulement dans le cylindre extérieur déformable de rayon R_{ext} en rotation autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante Ω_{spin} . Un forçage multipolaire, en rotation à la vitesse angulaire Ω_{orb} , est appliqué sur le cylindre. Le rayon de la paroi déformable du cylindre extérieur vérifie

$$R_{ext}^{def}(\theta) = R_{ext} [1 + \beta \cos(n\theta)], \quad (\text{B.1})$$

où β et n sont respectivement l'amplitude et la fréquence azimutale de la déformation. Nous définissons $\Omega_R = \Omega_{orb}/\Omega_{spin}$ comme le rapport entre la vitesse angulaire de la déformation et la vitesse de rotation du cylindre. Nous considérons deux disques de rayon R séparés par une distance H . Ces deux plaques tournent autour de l'axe (Oz) à une vitesse angulaire égale à celle du cylindre extérieur, Ω_{spin} (figure 4.16).

Dans cette situation, l'écoulement est stationnaire. Nous travaillons dans le référentiel en rotation avec la déformation à la vitesse angulaire Ω_R . Le rayon des disques cylindriques R est utilisé comme échelle de longueur et l'inverse de la vitesse angulaire de ces plaques, Ω_{spin}^{-1} , comme échelle de temps. Dans ce référentiel, les équations de Navier-Stokes et de continuité en régime stationnaire s'écrivent en coordonnées cylindrico-polaires :

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - 2\Omega_R u_\theta = -\frac{\partial p}{\partial r} + E \nabla^2 u_r, \quad (\text{B.2a})$$

$$u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_r}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + 2\Omega_R u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + E \nabla^2 u_\theta, \quad (\text{B.2b})$$

$$u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + E \nabla^2 u_z, \quad (\text{B.2c})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.2d})$$

où $E = \nu/(\Omega_{spin} H^2)$ est le nombre d'Ekman basé sur la distance entre les deux disques, H . Considérons le cas général d'une déformation multipolaire (Le Dizès, 2000; Eloy *et al.*, 2000),

l'écoulement de base est alors donné par

$$U_r = -\beta r^{n-1} (1 - \Omega_R) \sin(n\theta), \quad (\text{B.3a})$$

$$U_\theta = r (1 - \Omega_R) - \beta r^{n-1} (1 - \Omega_R) \cos(n\theta), \quad (\text{B.3b})$$

$$U_z = 0, \quad (\text{B.3c})$$

$$p = \frac{r^2}{2} (1 - \Omega_R^2) + \beta \frac{r^n}{n} [n (1 - \Omega_R) - 2] (1 - \Omega_R) \cos(n\theta). \quad (\text{B.3d})$$

Pour une déformation fixe, $\Omega_R = 0$, et un forçage elliptique, $n = 2$, nous retrouvons l'écoulement de base utilisé dans l'étude de l'instabilité elliptique (voir par exemple [Kerswell \(2002\)](#)).

2 Solution linéaire dans les couches d'Ekman supérieure et inférieure

Le champ des vitesses et de pression donné par (B.3) est solution de l'équation de Navier-Stokes dans le volume et de l'équation de continuité. Cependant, les lignes de courant obtenues sont elliptiques pour $n = 2$ et le long d'une même ligne de courant la vitesse n'est pas constante : elle est plus faible dans les zones de grande courbure. Or, sur les parois inférieure (en $z = 0$) et supérieure (en $z = H$) l'écoulement doit satisfaire aux conditions de non-glissement. Sur ces parois, la condition de non-glissement dans le référentiel en rotation avec la déformation est une rotation solide à la vitesse angulaire $(1 - \Omega_R)$. Pour pouvoir satisfaire cette condition aux limites, nous introduisons une couche visqueuse permettant de raccorder l'écoulement en volume à la condition aux limites à la paroi. Considérons le disque inférieur et introduisons au voisinage de $z = 0$, la coordonnée de couche limite :

$$\zeta = \frac{z}{E^{1/2}} \quad (\text{B.4})$$

Notons que du fait de la symétrie du système, nous nous attendons à avoir la même situation au voisinage de la paroi supérieure. Supposons que les vitesses radiale u_r et orthoradiale u_θ soient d'ordre $O(1)$ dans la couche limite, alors l'équation de continuité (B.2.d) met en évidence que la vitesse axiale dans la couche limite u_z est d'ordre $O(E^{1/2})$. Dans cette approximation, les équations (B.2.a-c) se réduisent à :

$$\frac{u_{0,\theta}}{r} \frac{\partial u_{1,r}}{\partial \theta} - \frac{2 u_{0,\theta} u_{1,\theta}}{r} - 2 \Omega_R u_{1,\theta} = -\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_{1,r}}{\partial \zeta^2}, \quad (\text{B.5a})$$

$$u_{1,r} \frac{\partial u_{0,\theta}}{\partial r} + \frac{u_{0,\theta}}{r} \frac{\partial u_{1,\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_{0,\theta} u_{1,r}}{r} + 2 \Omega_R u_{1,r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_{1,\theta}}{\partial \zeta^2}, \quad (\text{B.5b})$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \zeta} = 0, \quad (\text{B.5c})$$

où $u_{0,\theta}$ désigne la solution à l'ordre β^0 . L'équation (B.5) implique que le champ de pression ne dépend pas de la variable ζ dans la couche limite. Son expression est donc donné directement par la relation (B.3.d). La nature du forçage multipolaire de période azimutale n , conduit à chercher un champ des vitesses sous la forme :

$$u_{1,r} = \beta \tilde{u}_{1,r} e^{in\theta} + \text{c.c} \quad \text{et} \quad u_{1,\theta} = \beta \tilde{u}_{1,\theta} e^{in\theta} + \text{c.c}. \quad (\text{B.6})$$

A partir des équations (B.5.a-b) et avec la solution à l'ordre 0, on obtient les équations :

$$i n (1 - \Omega_R) \tilde{u}_{1,r} - 2 \tilde{u}_{1,\theta} = -\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{1,r}}{\partial \zeta^2} \quad (\text{B.7a})$$

$$2 \tilde{u}_{1,r} + i n (1 - \Omega_R) \tilde{u}_{1,\theta} = -\frac{i n \tilde{p}_1}{r} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{1,\theta}}{\partial \zeta^2} \quad (\text{B.7b})$$

En $\zeta = 0$, i.e. à la paroi inférieure, le champ des vitesses doit être nul au premier ordre en β , par conséquent, on impose les conditions aux limites suivantes :

$$\tilde{u}_{1,r}(\zeta = 0) = 0, \quad \tilde{u}_{1,\theta}(\zeta = 0) = 0, \quad \tilde{u}_{1,\zeta}(\zeta = 0) = 0. \quad (\text{B.8})$$

La condition de raccordement entre l'écoulement dans la couche limite et l'écoulement dans le volume implique que le champ des vitesses vérifie en $\zeta \rightarrow +\infty$ les conditions

$$\tilde{u}_{1,r}(+\infty) = -\frac{r^{n-1} (1 - \Omega_R)}{2i}, \quad \tilde{u}_{1,\theta}(+\infty) = -\frac{r^{n-1} (1 - \Omega_R)}{2}, \quad \tilde{u}_{1,\zeta}(+\infty) = 0. \quad (\text{B.9})$$

Par conséquent, la solution de ce problème est donnée par :

$$\tilde{u}_{1,r} = i \frac{r^{n-1} (1 - \Omega_R)}{2} (1 - e^{-\lambda \zeta}) \quad (\text{B.10a})$$

$$\tilde{u}_{1,\theta} = -\frac{r^{n-1} (1 - \Omega_R)}{2} (1 - e^{-\lambda \zeta}) \quad (\text{B.10b})$$

$$\tilde{u}_{1,z} = 0 \quad (\text{B.10c})$$

$$\tilde{p}_1 = \frac{r^n}{2n} [n (1 - \Omega_R) - 2] (1 - \Omega_R) \quad (\text{B.10d})$$

où on a posé

$$\lambda = (1 + s_{\pm} i) \left| \frac{n}{2} (1 - \Omega_R) - 1 \right|^{1/2} \quad (\text{B.11})$$

avec

$$s_{\pm} = 1 \quad \text{pour} \quad n (1 - \Omega_R)/2 - 1 > 0 \quad (\text{B.12a})$$

$$\text{et} \quad s_{\pm} = -1 \quad \text{pour} \quad n (1 - \Omega_R)/2 - 1 < 0. \quad (\text{B.12b})$$

On en déduit alors le champ des vitesses et de pression dans la couche limite

$$u_{1,r} = -r^{n-1} (1 - \Omega_R) \left[\sin(n\theta) - e^{-|\frac{n}{2} (1 - \Omega_R) - 1|^{1/2} \zeta} \sin \left(n\theta + s_{\pm} \left| \frac{n}{2} (1 - \Omega_R) - 1 \right|^{1/2} \zeta \right) \right] \quad (\text{B.13})$$

$$u_{1,\theta} = -r^{n-1} (1 - \Omega_R) \left[\cos(n\theta) - e^{-|\frac{n}{2} (1 - \Omega_R) - 1|^{1/2} \zeta} \cos \left(n\theta + s_{\pm} \left| \frac{n}{2} (1 - \Omega_R) - 1 \right|^{1/2} \zeta \right) \right] \quad (\text{B.14})$$

$$u_{1,z} = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$p_1 = \frac{r^n}{n} [n (1 - \Omega_R) - 2] (1 - \Omega_R) \cos(n\theta) \quad (\text{B.16})$$

Les figures B.1(a) et B.1(b) montrent le champ des vitesses à l'ordre β dans la couche d'Ekman pour un forçage elliptique, $n = 2$ et une déformation en rotation à la vitesse angulaire $\Omega_R = 3$. Le forçage induit un ajustement de la vitesse radiale et azimuthale dans la couche d'Ekman de manière similaire à l'étude d'un forçage temporel dans un cylindre en rotation (Lopez & Marques, 2011).

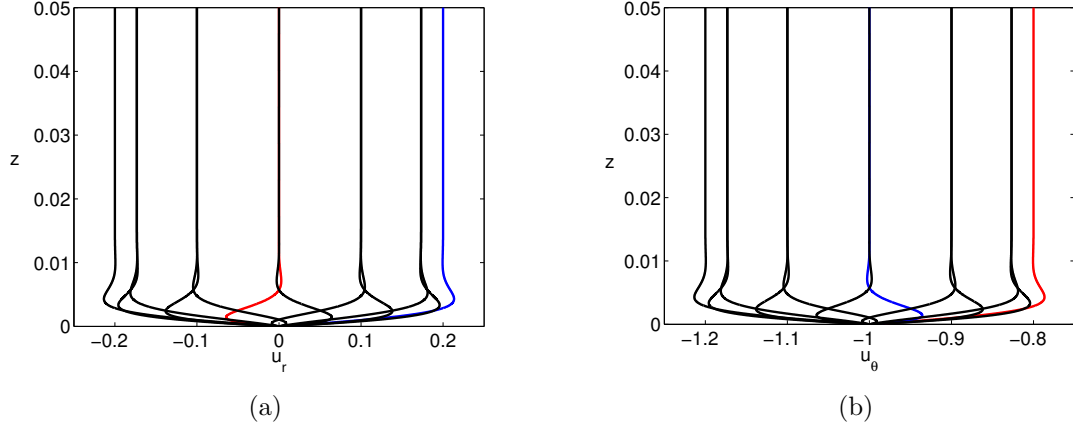


FIGURE B.1 – Champ des vitesses dans la couche limite inférieure pour une déformation elliptique, $n = 2$, $\Omega_R = 3$, $\beta = 0.2$ et $E = 10^{-5}$ (a) Vitesse radiale et (b) vitesse azimuthale dans le référentiel lié à la déformation. Douze profils régulièrement espacés entre $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ sont représentés en $r = 0.5$. Les profils rouge et bleu correspondent respectivement à $\theta = 0$ et $\theta = \pi/4$.

3 Écoulement non-linéaire

Nous avons vu dans la section précédente que la déformation multipolaire génère, en plus de l'écoulement de rotation solide, un écoulement à l'ordre β comportant des harmoniques $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$. De la même manière que dans l'étude d'un cylindre ou d'une sphère sujet à une oscillation de sa vitesse de rotation, la contribution non-linéaire, i.e. β^2 , de cet écoulement avec lui-même va créer des harmoniques $e^{2in\theta}$, $e^{-2in\theta}$ et e^{i0} . Ce dernier terme correspond au *vent zonal*. Lorsqu'on mesure la vitesse du fluide, c'est ce dernier terme qui contribue à l'écoulement après une rotation entière d'une particule de fluide.

3.1 Écoulement non-linéaire dans le volume

Contrairement au cas d'un forçage par libration longitudinale où l'écoulement dans le volume est nul au premier ordre, il faut ici tenir compte des contributions de période azimuthale n dans le volume et étudier si leur interaction non-linéaire peut donner naissance à un écoulement zonal. Dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à l'écoulement axisymétrique, c'est-à-dire au terme d'harmonique e^{i0} . Dans le volume, on a pour cette harmonique à l'ordre β^2 :

$$r^{2n-3} (n-1) (1 - \Omega_R)^2 - 2u_{2,\theta} = -\frac{\partial p_2}{\partial r} \quad (\text{B.17a})$$

$$u_{2,r} = 0 \quad (\text{B.17b})$$

$$u_{2,z} = 0 \quad (\text{B.17c})$$

En effet, la contribution non-linéaire à travers le terme $(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}$ est nulle, ne générant pas d'écoulement non-linéaire en l'absence des couches limites supérieure et inférieure. Les effets physiques générant un écoulement zonal dans le volume sont donc les mêmes que dans le cas d'un forçage temporel. En pratique, les équations (B.17a-c) signifient que le champ des vitesses dépend uniquement de la variable r et peut s'écrire sous la forme

$$u_{2,\theta} = r \Omega_2(r) \quad (\text{B.18})$$

où Ω_2 est une fonction de r uniquement que l'on va déterminer dans la suite.

3.2 Solution non-linéaire axisymétrique dans la couche limite

Les équations (B.2a-c) dans la couche limite à l'ordre β^2 s'écrivent :

$$u_{1,r} \frac{\partial u_{1,r}}{\partial r} + \frac{u_{1,\theta}}{r} \frac{\partial u_{1,r}}{\partial \theta} - \frac{u_{1,\theta}^2}{r} - 2 u_{2,\theta} = -\frac{\partial p_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_{2,r}}{\partial \zeta^2} \quad (\text{B.19a})$$

$$u_{1,r} \frac{\partial u_{1,\theta}}{\partial r} + \frac{u_{1,\theta}}{r} \frac{\partial u_{1,\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_{1,\theta} u_{1,r}}{r} + 2 u_{2,r} = \frac{\partial^2 u_{2,\theta}}{\partial \zeta^2} \quad (\text{B.19b})$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0 \quad (\text{B.19c})$$

En explicitant les termes du premier ordre avec les expressions obtenues en (B.7a-d), on obtient :

$$\frac{\partial^2 u_{2,r}}{\partial \zeta^2} + 2 u_{2,\theta} = \frac{\partial p_2}{\partial r} + r^{2n-3} (n-1) (1 - \Omega_R)^2 (1 - e^{-\lambda \zeta}) (1 - e^{-\lambda^* \zeta}) \quad (\text{B.20a})$$

$$\frac{\partial^2 u_{2,\theta}}{\partial \zeta^2} - 2 u_{2,r} = 0 \quad (\text{B.20b})$$

Ce qui nous permet d'obtenir une équation différentielle en ζ pour $(u_{2,r} + i u_{2,\theta})$:

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} - 2i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) (u_{2,r} + i u_{2,\theta}) = r^{2n-3} (n-1) (1 - \Omega_R)^2 \left(\lambda e^{-\lambda \zeta} + \lambda^* e^{-\lambda^* \zeta} - (\lambda + \lambda^*) e^{-(\lambda + \lambda^*) \zeta} \right) \quad (\text{B.21})$$

Les conditions de non-glissement à la surface du cylindre, i.e. en $\zeta = 0$, se traduisent par

$$u_{2,r}(\zeta = 0) = 0 \quad \text{et} \quad u_{2,\theta}(\zeta = 0) = 0 \quad (\text{B.22})$$

Et la condition de raccordement entre la solution dans la couche d'Ekman et la solution dans le volume s'écrit

$$u_{2,r}(\zeta = +\infty) = 0 \quad \text{et} \quad u_{2,\theta}(\zeta = +\infty) = r \Omega_2(r) \quad (\text{B.23})$$

La solution au problème posé par (B.21)-(B.23) est

$$u_{2,r} + i u_{2,\theta} = i r \Omega_2(r) (1 - e^{-\kappa \zeta}) + r^{2n-3} (n-1) (1 - \Omega_R)^2 \left[\frac{e^{-\kappa \zeta} - e^{-(\lambda + \lambda^*) \zeta}}{\kappa^2 - (\lambda + \lambda^*)^2} - \frac{e^{-\kappa \zeta} - e^{-\lambda \zeta}}{\kappa^2 - \lambda^2} - \frac{e^{-\kappa \zeta} - e^{-\lambda^* \zeta}}{\kappa^2 - \lambda^{*2}} \right] \quad (\text{B.24})$$

où on a posé $\kappa = 1 + i$. L'équation de continuité dans la couche limite pour la contribution non-linéaire axisymétrique, $\beta^2 e^{i0}$ s'écrit

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_{2,r}) + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial u_{2,z}}{\partial \zeta} = 0 \quad (\text{B.25})$$

Les vitesses $U_{2,r}$ et $U_{2,\theta}$ dans le volume dépendent uniquement de r , ainsi l'équation de continuité implique que la vitesse axiale dans le volume ne dépend pas de la coordonnée axiale z :

$$\frac{\partial U_{2,z}}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.26})$$

De plus, le système présente une symétrie par rapport à l'équateur. Ainsi, on a, en $z = H/2$, $U_{2,z} = 0$ d'où par conséquent $U_{2,z}$ est nulle dans le tout le volume. Pour satisfaire la condition de raccordement, l'équation (B.25) implique que $u_{2,r}$ satisfait à la relation :

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} u_{2,z} = -\sqrt{E} \int_0^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_{2,r}) d\eta = 0 \quad (\text{B.27})$$

Injectons la solution (B.24) dans la relation (B.27). On obtient alors une équation différentielle pour la fonction $\Omega_2(r)$ avec $S > 0$:

$$\frac{r^2}{2} \frac{d\Omega_2(r)}{dr} + r \Omega_2(r) + \frac{r^{2n-3} (n-1)^2 (1-\Omega_R)^2 [1-S[2+S(10\sqrt{S}-2S-9)]]}{2(4S^2+1)(S^2-1)} = 0 \quad (\text{B.28})$$

où S est défini par

$$S = \left| \frac{n}{2} (1-\Omega_R) - 1 \right| \quad (\text{B.29})$$

La constante d'intégration doit être prise nulle afin que la fonction $\Omega_2(r)$ ne diverge pas en $r = 0$. En conséquent, la solution est donnée par

$$\Omega_2 = -\frac{r^{2n-4} (n-1)^2 (1-\Omega_R)^2 [1-S[2+S(10\sqrt{S}-2S-9)]]}{2(4S^2+1)(S^2-1)}. \quad (\text{B.30})$$

4 Discussion

L'expression (B.30) montre une différence importante entre un forçage elliptique, $n = 2$ et un forçage de période azimutale, $n > 2$. Pour $n = 2$, la structure de la vitesse angulaire associée à l'écoulement zonal est la même que dans le cas d'un forçage de libration longitudinale (Wang, 1970) : la vitesse angulaire ne dépend pas du rayon. Pour de plus larges valeurs de n , Ω_2 dépend de la position radiale dans l'écoulement. Nous reviendrons sur ce point ci-dessous. Le cas d'une déformation elliptique, $n = 2$, est présenté en figure B.2(a). La vitesse angulaire Ω_2 , associée à l'écoulement zonal, reste positive pour

$$\frac{n-2}{n} - \frac{2[1+2^{1/3}+2^{2/3}]}{n} < \Omega_R < \frac{n-2}{n} + \frac{2[1+2^{1/3}+2^{2/3}]}{n} \quad (\text{B.31})$$

puis décroît vers $-\infty$ pour des grandes valeurs de Ω_R . Un autre aspect particulier est que le vent zonal s'annule pour $\Omega_R = 1$, quelle que soit la période azimutale n du forçage. Cela correspond en pratique à une vitesse angulaire de la déformation égale à la vitesse angulaire du cylindre : les deux sont synchronisés. Par conséquent, l'écoulement est une simple rotation solide dans le volume et aucun pompage n'est généré dans les couches d'Ekman supérieure et inférieure. Notons également un point singulier pour $\Omega_R = 1 - 2/n$, par exemple $\Omega_R = 0$ pour une déformation elliptique $n = 2$. Dans ce cas, $S = 0$ et la couche d'Ekman est singulière : le développement ci-dessus ne peut être utilisé. Néanmoins, nous remarquons, comme dans le cas étudié par Wang (1970), que la courbe peut être prolongée par continuité.

La vitesse angulaire associée au vent zonal, Ω_2 , est présentée en figure B.2(b) pour une valeur donnée $\Omega_R = 2$ et différentes valeurs de la période du forçage multipolaire n . Comme nous l'avons mentionné précédemment, le forçage elliptique est le seul cas où la vitesse angulaire associée à l'écoulement moyen ne dépend pas du rayon. Nous pouvons également remarquer qu'augmenter la valeur de n conduit à un aplatissement de la vitesse angulaire près de l'axe de rotation et une

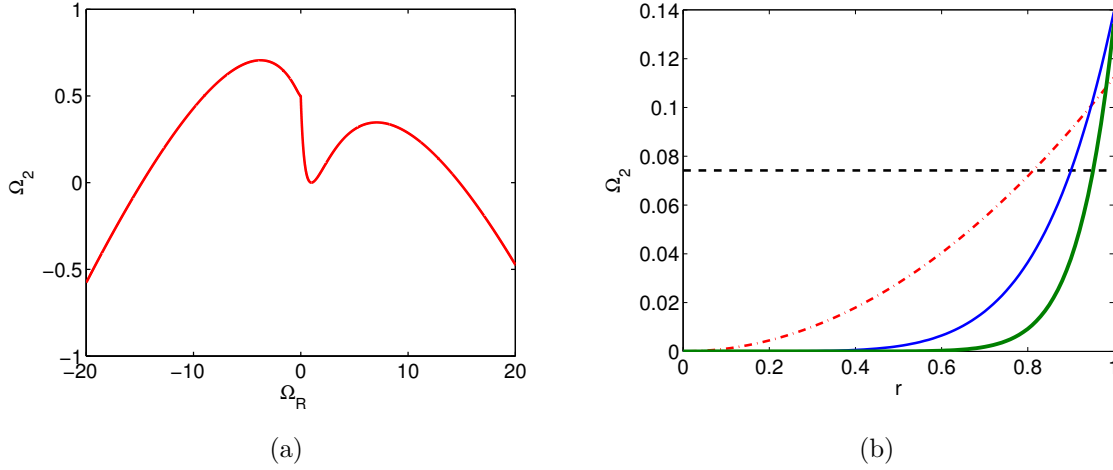


FIGURE B.2 – (a) Vitesse angulaire associée au vent zonal généré par un forçage elliptique, $n = 2$. (b) Vitesse angulaire associée au vent zonal généré par différents forçages multipolaires pour $\Omega_R = 2$; $n = 2$: pointillés noirs; $n = 3$ tirets-pointillés rouges; $n = 5$: courbe bleue $n = 8$: courbe verte épaisse.

augmentation de celle-ci au voisinage de $r = 1$. Cette variation avec le rayon provient du fait que la forme d'une ligne de courant, renormalisée par $(1 - \Omega_R)$, est définie par

$$\Psi = -\frac{r^2}{2} + \beta \frac{r^n}{n} \cos(n\theta) = k, \quad (\text{B.32})$$

où k est une constante. Nous pouvons alors définir une déformation locale par

$$\beta_n = \beta \left(\frac{2nk}{n-2} \right)^{(n-2)/2} \quad (\text{B.33})$$

qui traduit son asymétrie (voir [Le Dizès & Eloy, 1999](#), pour plus de détails). β_n mesure la déformation locale le long de la ligne de courant. On note alors que le cas $n = 2$ correspond à une simple déformation elliptique, β_2 , constante pour toutes les lignes de courant. Par contre pour $n \geq 3$, la déformation des lignes de courant n'est plus homogène quand on fait varier la constante k . On remarque que pour des petites valeurs de k , i.e. au voisinage du centre de l'écoulement, les lignes de courant $\Psi = k$ sont quasi-circulaires. Alors que lorsqu'on s'éloigne, i.e. quand $\beta_n \rightarrow 1$, les lignes de courant deviennent de plus en plus déformées et leur excentricité locale est définie par (B.33). Ceci est clairement visible sur les figures 1.21 présentées dans la section 1.3.2.

Nous pouvons également noter que du fait de la déviation à une rotation solide entre les deux disques, l'écoulement axisymétrique dans le volume (pour $r < 1$) n'a pas la même vitesse que dans la région extérieure ($r > 1$). Par conséquent, cette discontinuité va être lissée dans des couches de Stewartson de même structure que l'écoulement entre deux plaques cylindriques tournant à des vitesses différentes ([Stewartson, 1957, 1966](#)). La présence de telles couches a été étudiée en géométrie sphérique dans le chapitre 3.

Ce calcul permet de souligner l'analogie entre l'écoulement moyen généré par un forçage temporel ou un forçage azimutal entre deux plaques cylindriques. Néanmoins, comme dans le cas étudié par [Wang \(1970\)](#), un forçage d'ondes inertielles est susceptible de se produire selon la fréquence de libration. Dans un cylindre soumis à un forçage de libration longitudinale à la fréquence ω , les ondes inertielles émises satisfont la relation $\omega = 2 \sin \theta$ où θ est l'angle entre la

direction de propagation des ondes inertielles et l'axe de rotation. Pour un forçage multipolaire, nous nous attendons à avoir une excitation directe d'ondes inertielles dans la gamme

$$n - 2 < \omega < n + 2 \quad (\text{B.34})$$

Même si nous avons illustré cette analogie dans un cylindre en rotation du fait de la simplicité des conditions aux limites, le même mécanisme est présent dans une sphère soumise à un forçage azimuthal. Le même calcul peut être développé dans cette géométrie, le seul problème venant de la définition des conditions aux limites.

Pour finir, notons que dans la région (II), les lignes de courant elliptique doivent être corrigées au voisinage de la paroi extérieure, en $r = R_{ext}$. Dans la limite des petites déformations, $\beta \ll 1$, [Eloy \(2000\)](#) a montré que la correction au premier ordre de la fonction de courant, pour un petit nombre d'Ekman, $E \leq \beta$, conduit au champ de vitesses :

$$U_r = -\beta r^{n-1} (1 - \Omega_R) \sin(n\theta) - (1 - \Omega_R) \frac{\beta \sqrt{E} (1 - n)}{\sqrt{n}} e^{k_\nu (r - R_{ext})} \sin\left(k_\nu (r - R_{ext}) + n\theta + \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{B.35})$$

$$U_\theta = r (1 - \Omega_R) - \beta r^{n-1} (1 - \Omega_R) \cos(n\theta) - (1 - \Omega_R) \frac{\beta k_\nu \sqrt{E} (1 - n)}{n^{3/2}} e^{k_\nu (r - R_{ext})} \times \left[\cos\left(k_\nu (r - R_{ext}) + n\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(k_\nu (r - R_{ext}) + n\theta + \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (\text{B.36})$$

$$U_z = 0, \quad (\text{B.37})$$

où on a posé

$$k_n = \sqrt{\frac{n}{2E}}. \quad (\text{B.38})$$

Déformations optiques

La visualisation directe de l'écoulement, à l'aide de particules de Kalliroscope, ne rend pas directement compte de la structure de l'écoulement dans la sphère. En effet, la forme cylindrique ou plane des dioptries air/silicone et silicone/eau modifie le trajet des rayons lumineux (figure C.1(a)). Pour obtenir la structure réelle de l'écoulement, nous devons corriger ces déformations à l'aide des lois de l'optique géométrique. Ainsi, à partir d'une image enregistrée par la caméra (voir par exemple la figure C.1(b)), nous pouvons remonter aux positions réelles des bandes lumineuses dans la sphère. Dans ce chapitre, nous considérons successivement un plan perpendiculaire à l'axe de rotation (dioptre cylindrique entre l'air et le silicone, plan rouge figure C.1(b)) puis un plan parallèle à l'axe de rotation (dioptre plan entre l'air et le silicone plan vert figure C.1(b)). L'axe de rotation est orienté suivant l'axe (Oz).

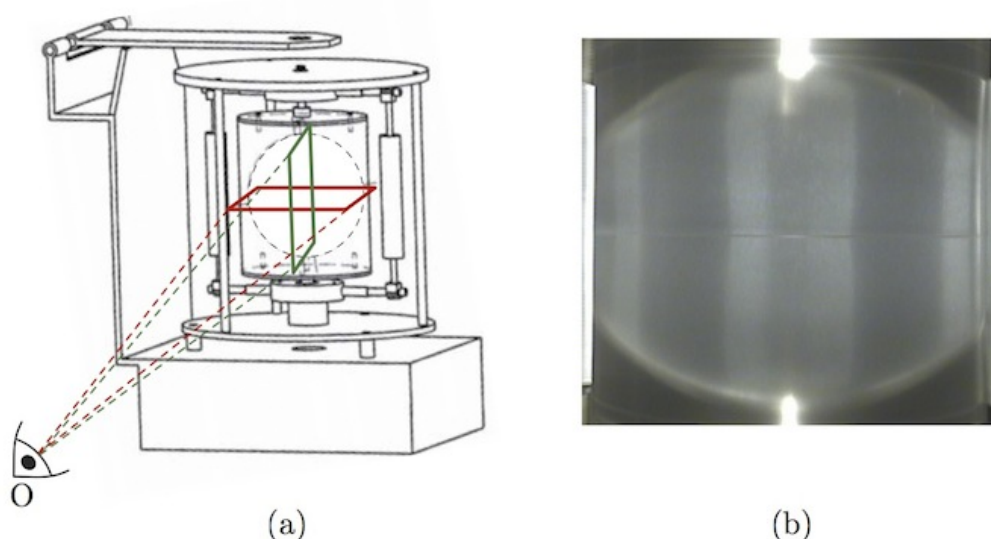


FIGURE C.1 – (a) Schéma du dispositif expérimental ; les plans rouge et vert sont respectivement perpendiculaire et parallèle à l'axe de rotation du cylindre. (b) Visualisation à l'aide de particules de Kalliroscope effectuée dans le référentiel du laboratoire montrant la présence de bandes lumineuses.

1 Déformation optique dans le plan horizontal

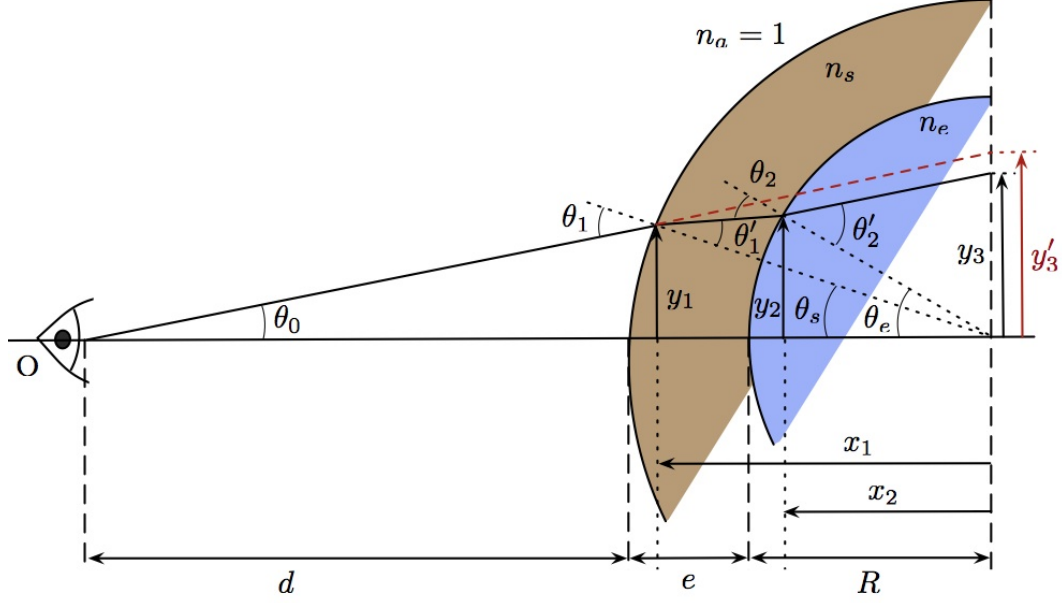


FIGURE C.2 – Représentation schématique du trajet d'un rayon lumineux à la traversée des deux dioptries cylindriques air/silicone et silicone/eau. La caméra perçoit un pixel à une distance y'_3 de l'axe alors que sa distance réelle est y_3 .

Nous plaçons la caméra au point O, à une distance d de la matrice en silicone qui contient une sphère de rayon R , remplie d'eau d'indice optique $n_e = 1,33$. Le silicone déformable, qui entoure la sphère, a une épaisseur e variable ($e = 1$ cm à l'équateur) et un indice optique $n_s = 1,41$. Un point, en réalité situé à une distance y_3 du centre de la sphère, est perçu par la caméra à une distance y'_3 du fait de la réfraction du rayon lumineux au niveau des deux dioptries circulaires (voir figure C.2). Le but de cette section est de déterminer la distance réelle de ce point dans la sphère à partir de l'image enregistrée par la caméra.

Considérons le rayon lumineux qui part du point situé en y_3 et qui atteint l'objectif de la caméra en O. La distance y_1 , représentée sur la figure C.2, est donnée par

$$y_1 = (d + e + R - x_1) \tan \theta_0. \quad (\text{C.1})$$

Le dioptre air/silicone est, à l'équateur, un cercle de rayon $R + e$. Les distances x_1 et y_1 vérifient donc la relation

$$x_1^2 + y_1^2 = (R + e)^2 \quad (\text{C.2})$$

Utilisons cette expression pour remplacer y_1 dans l'équation (C.1). Nous obtenons une équation du second degré pour x_1 :

$$(1 + \tan^2 \theta_0) x_1^2 - 2(d + e + R) \tan^2 \theta_0 x_1 + (d + e + R)^2 \tan^2 \theta_0 - (R + e)^2 = 0. \quad (\text{C.3})$$

La solution à cette équation est donnée par

$$x_1 = \frac{2(d + e + R) \tan^2 \theta_0 + \sqrt{\Delta_1}}{2(1 + \tan^2 \theta_0)}, \quad (\text{C.4})$$

où le discriminant Δ_1 a pour expression

$$\Delta_1 = (R + e)^2 - 2d \tan^2 \theta_0 (R + e) - d^2 \tan^2 \theta_0. \quad (\text{C.5})$$

Au niveau du dioptre silicone/eau, le rayon lumineux passe à une distance y_2 de l'axe donnée par

$$y_2 = y_1 + \tan(\theta'_1 - \theta_s) (x_1 - x_2) \quad (\text{C.6})$$

et l'angle θ_1 s'exprime en fonction de θ_0 et θ_s :

$$\theta_1 = \theta_0 + \theta_s. \quad (\text{C.7})$$

De plus, on peut exprimer les angles θ'_1 et θ_s respectivement à l'aide des lois de Snell-Descartes et par un raisonnement géométrique :

$$n_a \sin \theta_1 = n_s \sin \theta'_1 \quad \text{et} \quad \sin \theta_s = \frac{y_1}{R + e}. \quad (\text{C.8})$$

Le dioptre silicone/air se trouve sur une sphère de rayon R . Une seconde équation relie donc x_2 et y_2 :

$$x_2^2 + y_2^2 = R^2. \quad (\text{C.9})$$

Avec cette relation et l'équation (C.6) nous obtenons un polynôme du second degré en x_2 :

$$\begin{aligned} \left[1 + \tan^2(\theta'_1 - \theta_s) \right] x_2^2 - 2 \tan(\theta'_1 - \theta_s) [x_1 \tan(\theta'_1 - \theta_s) + y_1] x_2 \\ + \left[(x_1 \tan(\theta'_1 - \theta_s) + y_1)^2 - R^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

La solution est donnée par

$$x_2 = \frac{2 \tan(\theta'_1 - \theta_s) [x_1 \tan(\theta'_1 - \theta_s) + y_1] + \sqrt{\Delta_2}}{2 [1 + \tan^2(\theta'_1 - \theta_s)]} \quad (\text{C.11})$$

où le discriminant Δ_2 est

$$\Delta_2 = 4 \left[R^2 [1 + \tan^2(\theta'_1 - \theta_s)] - [y_1 + x_1 \tan(\theta'_1 - \theta_s)]^2 \right] \quad (\text{C.12})$$

L'angle θ'_2 s'obtient en utilisant la loi de Snell-Descartes pour la réfraction au niveau du dioptre silicone/eau :

$$n_e \sin \theta'_2 = n_s \sin \theta_2 \quad (\text{C.13})$$

Par construction géométrique, on peut exprimer les angles θ_e et θ_2 :

$$\sin \theta_e = \frac{y_2}{R} \quad \text{et} \quad \theta_2 = \theta'_1 + \theta_e - \theta_s \quad (\text{C.14})$$

y_3 s'écrit sous la forme :

$$\boxed{y_3 = y_2 + \tan(\theta'_2 - \theta_e) x_2} \quad (\text{C.15})$$

L'angle θ'_2 s'obtient à partir de la relation (C.13) avec (C.14), x_2 et y_2 se déduisent respectivement des relations (C.11) et (C.6). Sur les images enregistrées par la caméra, un pixel sera à une distance y'_3 de l'axe donnée par

$$\boxed{y'_3 = (d + e + R) \tan \theta_1}. \quad (\text{C.16})$$

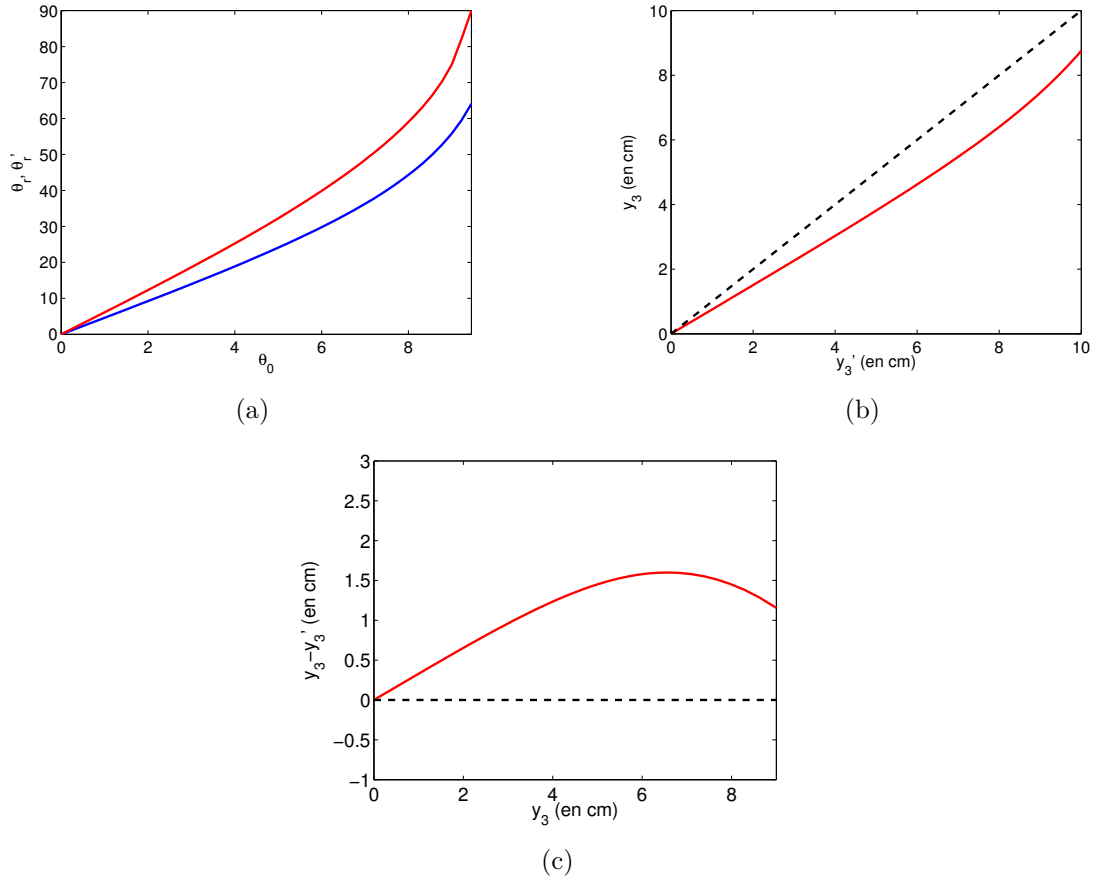


FIGURE C.3 – (a) Angle perçu par la caméra θ'_r (en rouge) et angle réel θ_r (en bleu) tenant compte de la réfraction des rayons lumineux. (b) Distance au centre perçue par la caméra y_3 en fonction de la distance réelle au centre y_3 (courbe rouge). La courbe noire en pointillés représente ces distances en l'absence de réfraction. (c) Différence entre la distance perçue par la caméra y_3 et la distance réelle y_3 en fonction de y_3 (courbe rouge). La courbe en pointillée est le résultat obtenu en l'absence de toute réfraction.

On peut également exprimer l'angle auquel apparaît une bande cisaillement :

$$\theta_r = \arcsin\left(\frac{y_3}{R}\right), \quad (\text{C.17})$$

et l'angle apparent mesuré par la caméra :

$$\theta'_r = \arcsin\left(\frac{y'_3}{R}\right). \quad (\text{C.18})$$

La caméra est placée à une distance $d = 50$ cm de la matrice en silicone. A l'équateur l'épaisseur du silicone vaut $e = 1$ cm et le rayon de la sphère est $R = 10$ cm. De plus les indices optiques de l'air, du silicone et de l'eau sont respectivement $n_a = 1$, $n_s = 1.41$ et $n_e = 1.33$. La déviation des rayons lumineux se fait principalement au niveau du dioptré air/silicone du fait de la grande différence d'indice. La contribution du dioptré silicone/eau est moins importante car la différence d'indice optique est plus faible. Nous avons représenté en figure C.3(a) l'angle perçu par la caméra θ'_r et l'angle réel θ_r en fonction de l'angle d'observation θ_0 . Cette figure montre qu'il n'existe de solutions que pour $\theta_0 \leq 9,45^\circ$ avec les paramètres expérimentaux

utilisés. Au delà de cette valeur, les rayons optiques ne passent plus dans la sphère. Nous notons également qu'il peut y avoir une différence significative entre l'angle réel et l'angle apparent visualisé par la caméra, jusqu'à 1,5 cm d'écart comme l'illustre la figure C.3(c). Cette différence est particulièrement prononcée sur le bord de la sphère. De plus, la forme cylindrique de la matrice en silicone empêche de visualiser l'écoulement dans la sphère pour $\theta_r \geq 64^\circ$. Ces zones d'ombres représentent environ 1 cm de chaque côté de la sphère. La figure C.3(b) permet de corréler directement la position radiale réelle d'un pixel, y_3 , pour une valeur mesurée par la caméra, y'_3 et montre également une différence de distance qui peut être non négligeable.

2 Déformation optique dans le plan vertical

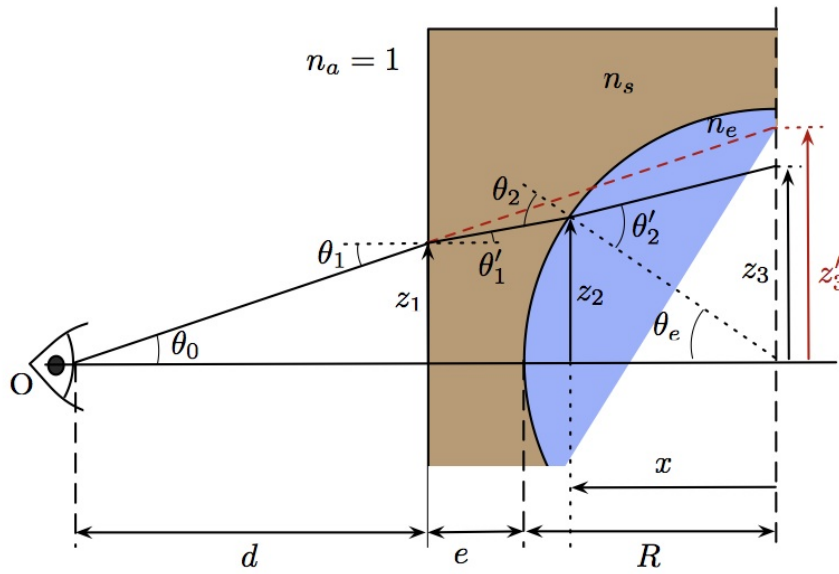


FIGURE C.4 – Représentation schématique du trajet d'un rayon lumineux dans le plan vertical à la traversée des dioptries air/silicone et silicone/eau. La caméra perçoit un pixel à une distance z'_3 de l'origine alors que sa distance réelle est z_3 .

Dans la section précédente, nous avons déterminé la déformation optique induite dans un plan horizontal. Considérons maintenant la déformation optique dans un plan vertical, parallèle à l'axe de rotation. Dans ce cas, la forme du dioptré air/silicone est modifiée et est maintenant plane (voir figure C.4).

Dans cette situation, les distances z_1 et z_2 sont données par

$$z_1 = d \tan \theta_0 \quad \text{et} \quad z_2 = z_1 + (e + R - x) \tan \theta'_1 \quad (\text{C.19})$$

De plus, la loi de Snell-Descartes pour la réfraction appliquée au dioptré air/silicone implique

$$n_a \sin \theta_1 = n_s \sin \theta'_1 \quad (\text{C.20})$$

et la géométrie sphérique conduit à la relation

$$x^2 + z_2^2 = R^2. \quad (\text{C.21})$$

A partir des relations (C.19) et (C.21) on obtient un polynôme du second ordre en x qui admet pour solution

$$x = \frac{2[z_1 + (R + e) \tan \theta'_1] \tan \theta'_1 + \sqrt{\Delta}}{2(1 + \tan^2 \theta'_1)} \quad (\text{C.22})$$

où Δ est le discriminant de cette équation et est donné par

$$\Delta = 4(R^2 - z_1^2) - 4 \tan \theta'_1 [2z_1(R + e) + e \tan \theta'_1 (2R + e)] \quad (\text{C.23})$$

Un raisonnement géométrique montre que l'angle θ_2 a pour expression

$$\theta_2 = \theta_e + \theta'_1 = \arccos\left(\frac{x}{R}\right) + \arcsin\left(\frac{n_a \sin \theta_1}{n_s}\right) \quad (\text{C.24})$$

Puis, la loi de Snell-Descartes pour la réfraction appliquée au dioptré silicone/eau se traduit par

$$n_s \sin \theta_2 = n_e \sin \theta'_2 \quad (\text{C.25})$$

Par conséquent, l'angle θ'_2 est donné par

$$\theta'_2 = \arcsin\left[\frac{n_s}{n_e} \sin\left(\arccos\left(\frac{x}{R}\right) + \arcsin\left(\frac{n_a \sin \theta_1}{n_s}\right)\right)\right] \quad (\text{C.26})$$

On obtient ensuite la distance z_3 par la relation

$$z_3 = z_2 + \tan(\theta'_2 - \theta_e) x \quad (\text{C.27})$$

En remplaçant z_2 , θ'_2 , θ_e et x par leurs expressions déterminées précédemment on peut calculer cette distance. Sur les images enregistrées par la caméra, la distance réelle du pixel est donnée par

$$z'_3 = (d + e + R) \tan \theta_0 \quad (\text{C.28})$$

L'angle, mesuré par la caméra, pour lequel apparaît une bande lumineuse de Kalliroscope est alors donné par

$$\theta'_r = \arcsin\left(\frac{z'_3}{R}\right) \quad (\text{C.29})$$

tandis que l'angle réel correspondant est

$$\theta_r = \arcsin\left(\frac{z_3}{R}\right) \quad (\text{C.30})$$

où z'_3 et z_3 sont respectivement données par les relations (C.28) et (C.27).

Nous avons représenté figure C.5 les angles θ_r et θ'_r en fonction de la valeur de l'angle d'observation θ_0 . Lorsque les rayons lumineux passent par la sphère, pour $\theta \leq 8,6^\circ$, il n'y a pas de déviation significative des rayons lumineux dans un plan vertical excepté très près des pôles. Les valeurs de θ_r et θ'_r sont très proches, l'erreur restant inférieure à 3%. En revanche, on constate que pour $\theta \geq 8,6^\circ$, aucune visualisation n'est possible avec les paramètres expérimentaux utilisés. Comme précédemment, il existe une zone d'ombre, qui cette fois-ci s'étend d'environ 0.1 cm aux deux pôles de la sphère.

3 Exemple

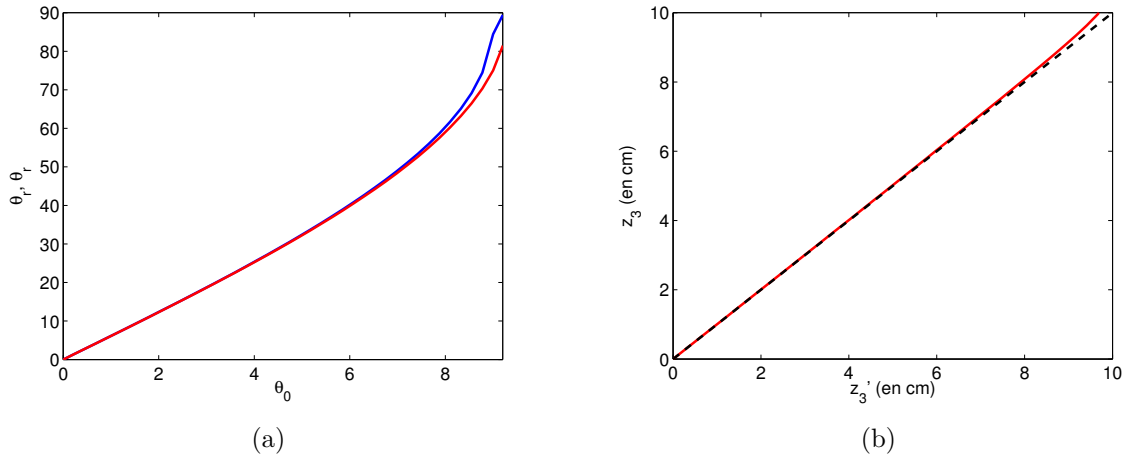


FIGURE C.5 – (a) Angle perçu par la caméra θ'_r (en rouge) et angle réel θ_r (en bleu) tenant compte de la réfraction des rayons lumineux dans le plan vertical. (b) Distance au centre perçue par la caméra z_3 en fonction de la distance réelle au centre z'_3 (courbe rouge). La courbe noire en pointillés représente ces distances en l'absence de réfraction.

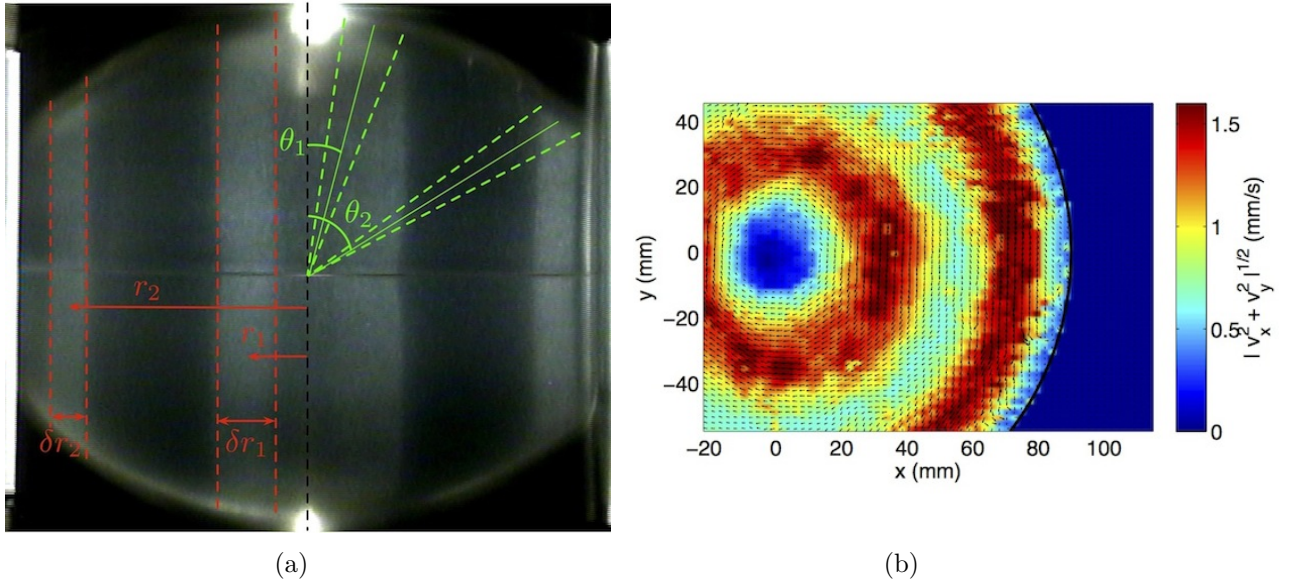


FIGURE C.6 – (a) Visualisation par particules de Kalliroscope du mode résonant obtenu avec un forçage de marées pour $\Omega_R = 0,178$, $E = 1,4 \times 10^{-5}$ et $\epsilon = 0,04$. (b) Champ PIV résultant pour les mêmes paramètres que la figure (a).

3 Exemple

Nous pouvons utiliser les résultats établis dans les sections précédentes pour déterminer la position réelle des bandes lumineuses de Kalliroscope obtenues pour un forçage résonant. Une image de l'écoulement obtenu pour un forçage de marées, avec $\Omega_R = 0,178$ est présentée figure C.6(a).

Pour ce mode résonant, deux bandes apparaissent : une localisée près de l'axe de rotation

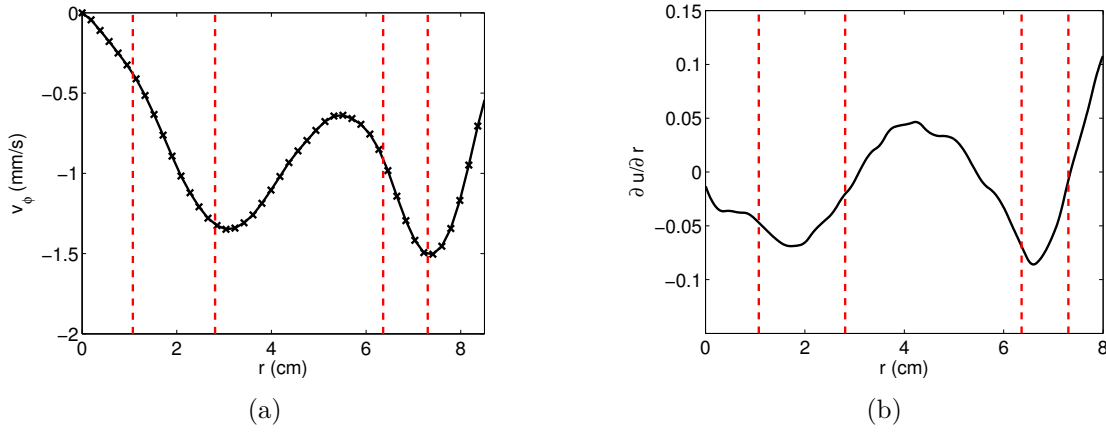


FIGURE C.7 – (a) Vitesse azimutale et (b) gradient radial de la vitesse azimutale $\partial u_\phi / \partial r$ correspondant au champ PIV présenté figure C.7(b). Les courbes rouges en pointillés représentent la position des bandes lumineuses observées avec les particules de Kalliroscope.

et une plus proche de l'équateur. Nous pouvons alors mesurer les angles θ_1 et θ_2 correspondant ainsi que les distances r_1 et r_2 correspondantes (figure C.6(a)). Pour mesurer la position radiale de ces bandes, nous utilisons en pratique la mesure des angles qui ne requiert pas de connaître l'échelle de longueur sur l'image. Pour une bande donnée, nous pouvons déterminer deux angles correspondant aux extrémités r_{min} et r_{max} de la bande lumineuse (voir figure C.6(a)). Pour la première bande, nous obtenons $\theta_{1,min} = 8,2^\circ$ et $\theta_{1,max} = 21,8^\circ$. Pour la seconde bande, nous avons $\theta_{2,min} = 52,7^\circ$ et $\theta_{2,max} = 62,4^\circ$. Comme nous l'avons vu précédemment, la déformation optique induit par la réfraction intervient principalement suivant la direction radiale, les résultats de la section 1 seront donc appliqués ici pour déterminer l'angle réel auquel apparaît une bande lumineuse. Nous obtenons que $\theta_{r,1,min} = 6,2^\circ$ et $\theta_{r,1,max} = 16,3^\circ$ puis $\theta_{r,2,min} = 39,5^\circ$ et $\theta_{r,2,max} = 46,9^\circ$. A partir de ces angles, nous pouvons déterminer les rayons correspondant auxquels apparaissent une bande lumineuse, $r = R \sin \theta$, où $R = 10$ cm est le rayon de la sphère. Nous obtenons alors pour la première bande $r_1 = 1,1 - 2,8$ cm et pour la seconde bande $r_2 = 6,4 - 7,3$ cm. Nous avons représenté la composante azimutale du champ des vitesses sur la figure C.7(a) ainsi que la position des bandes de cisaillement. Ces bandes de cisaillement semblent correspondre à une variation rapide de l'amplitude du vent zonal. Pour vérifier ce point, nous avons également représenté, en figure C.7(b), la dérivée radiale de ce champ de vitesses. Il apparaît que les bandes de cisaillement sont présentes dans les zones où ce cisaillement est négatif et maximum en amplitude.

Caractéristiques physiques de quelques planètes et satellites

Dans cette annexe, nous donnons les grandeurs physiques caractérisant certains satellites ou planètes. Ces grandeurs permettent d'estimer si les différents mécanismes présentés dans ce manuscrit sont susceptible de se produire aux échelles planétaires.

Masse totale	M
Densité du fluide	ρ
Viscosité cinématique du fluide	ν
Rayon externe moyen de la couche de fluide	R_{ext}
Rayon interne moyen de la couche de fluide	R_{int}
Vitesse angulaire moyenne	Ω_{spin}
Vitesse orbitale	Ω_{orb}
Rapport de l'axe majeur et de l'axe mineur dans le plan équatorial	a_1/a_2

TABLE D.1 – Notations des paramètres des corps astrophysiques.

Les expressions des paramètres sans dimensions caractérisant certains satellites et planètes sont données ci-dessous.

Rapport d'aspect du noyau	$a = R_{int}/R_{ext}$
Nombre d'Ekman	$E = \nu/(\Omega_{spin} R^2)$
Fréquence de libration physique	$\omega = \omega_{lib}/\Omega_{spin}$
Amplitude de libration	ε
Amplitude de la déformation elliptique	$\beta = (a_1^2 - a_2^2)/(a_1^2 + a_2^2)$

TABLE D.2 – Notations des paramètres sans dimension des corps astrophysiques.

Nous reportons les données utiles qui nous permettent d'estimer l'amplitude de l'écoulement ou la présence d'instabilité par les mécanismes de génération de vent zonaux. Ces valeurs ont été obtenues pas un important travail de compilation menées par [Noir et al. \(2009\)](#) puis par [Cébron \(2011\)](#) qui ont utilisé de nombreuses sources pour traduire les mesures astrophysiques en termes de paramètres sans dimension tels que nous les avons définis dans cette thèse (voir

notamment les articles suivants [Kerswell & Malkus, 1998](#); [Grasset *et al.*, 2000](#); [Anderson *et al.*, 2001](#); [Sohl *et al.*, 2003](#); [Husmann & Spohn, 2004](#); [Hauck *et al.*, 2004](#); [Tobie *et al.*, 2005](#); [Kuskov & Kronrod, 2005](#); [Wahr *et al.*, 2006](#); [Margot *et al.*, 2007](#); [Van Hoolst *et al.*, 2007](#); [Van Hoolst *et al.*, 2008, 2009](#); [Lorenz *et al.*, 2008](#); [Bland *et al.*, 2008, 2009](#); [Goldreich & Mitchell, 2010](#)). Nous renvoyons à [Cébron \(2011\)](#) pour plus de détails.

	Mercure	Venus	Terre	Terre primitive
M ($\times 10^{-24}$ kg)	0,330	4,87	5,98	5,98
R (km)	2440	6051	6378	6378
T_{spin} (jours terrestres)	58,3	-243	0,997	0,418
E ($\times 10^{14}$)	21	316	0,11	0,047
β ($\times 10^7$)	6,8	1,1	0,8	6,7

TABLE D.3 – Caractéristiques physiques de quelques planètes telluriques.

	Io	Europe	Ganymède	Callisto	Titan
M ($\times 10^{-22}$ kg)	8,93	4,8	14,8	10,8	13,45
R (km)	1822	1561	2631	2410	2576
ε ($\times 10^4$)	1,3	2	0,056	0,042	1,3
ω	1	1	1	1	3×10^{-3}
	core	core	core	core	core
a	0,52	0,38	0,27	—	0,25
E ($\times 10^{14}$)	2,7	14	20	—	27
β ($\times 10^4$)	60	9,7	3,7	—	1,2
	ocean	ocean	ocean	ocean	ocean
Épaisseur de la croûte (km)	—	10	100	150	70
Épaisseur de l’océan subsurfacique	—	100	150	150	200
E ($\times 10^{14}$)	—	2,0	1,5	4,5	3,5
β ($\times 10^4$)	—	9,7	3,7	0,72	1,2

TABLE D.4 – Caractéristiques physiques des quatres lunes galiéennes et de Titan.

Nous pouvons également rappeler les valeurs proposées par [Cébron \(2011\)](#) concernant quelques exoplanètes

	CoRoT-7b	GJ 1214b	55 CnC e
M (en masse terrestre)	4,8	6,55	8,57
R (en rayon terrestre)	1,68	2,678	1,63
E ($\times 10^{16}$)	9,4	6,8	8,6
β ($\times 10^3$)	7	6	5

 TABLE D.5 – Grandeurs caractéristiques de quelques exoplanètes ([Léger *et al.*, 2011](#); [Nettelmann *et al.*, 2010](#); [Winn *et al.*, 2011](#); [Cébron, 2011](#)).

Liste des publications

Dans un souci de cohérence du manuscrit, j'ai sélectionné différents travaux menés à l'IRPHE au cours de cette thèse qui traitent tous de l'*étude des forçages harmoniques sur les écoulements en rotation*. Les travaux effectués durant mon stage de Master 2 sur l'instabilité qui apparaît dans un dispositif de Taylor-Couette soumis à une déformation elliptique du cylindre extérieur n'ont pas été présentés, de même qu'une étude menée avec David Cébron traitant de l'instabilité elliptique dans un fluide non-homogène pour décrire les planètes gazeuses.

En plus des travaux effectués durant cette thèse, j'ai eu la chance de séjourner deux mois à l'Université de Hong Kong dans le groupe du professeur H.C. Shum. J'ai travaillé sur des écoulements microfluidiques caractérisés par une faible tension de surface et leurs applications dans la génération d'émulsions totalement aqueuses. Ces travaux ont donné lieu à plusieurs publications. Le dispositif expérimental développé durant ces études a également fait l'objet d'un dépôt de brevet. Durant l'été 2012, j'ai pu participer à l'école d'été *Geophysical Fluid Dynamics* de la *Woods Hole Oceanographic Institution*. Durant ce programme de dix semaines, nous avons développé, avec les professeurs N.J. Balmforth et C.P.C. Caulfield, un dispositif expérimental permettant d'étudier la dynamique d'un bulldozer dans un milieu granulaire. Ces travaux vont conduire à la rédaction prochaine d'un article.

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont donné lieu à différentes publications soumises, en cours d'écriture ou publiées. L'analyse théorique présentée au chapitre 3 ainsi que sa validation ont été acceptées pour publication par *Journal of Fluid Mechanics*. L'étude expérimentale et numérique du vent zonal induit par libration dans une sphère pour de petites fréquences de forçage, présentée au chapitre 4 a fait l'objet d'une publication dans *Journal of Fluid Mechanics*. La dynamique en conteneur non-axisymétrique décrite dans ce même chapitre, a fait partie d'une étude menée avec Jérôme Noir publiée dans *Physics of Earth and Planetary Interiors*. Les travaux, présentés dans le chapitre 6, mettant en évidence la génération spontanée d'ondes inertielles sont actuellement en cours d'écriture. Les résultats relatifs au forçage de libration longitudinale en géométrie cylindrique, disséminés au gré du manuscrit, ont également fait l'objet d'une publication dans *Physics of Fluids*.

Articles publiés ou acceptés pour publication

1. *Elliptical instability in hot jupiter systems*. D. Cébron, M. Le Bars, P. Le Gal, C. Moutou, J. Leconte & A. Sauret (accepté par Icarus).

2. *Libration-induced mean flow in a spherical shell*. A. Sauret & S. Le Dizès (accepté par Journal of Fluid Mechanics).
3. *Experimental study of libration-driven zonal flows in non-axisymmetric containers*. J. Noir, D. Cébron, M. Le Bars, A. Sauret & J.M. Aurnou. Physics of Earth and Planetary Interiors, **204-205**, 1-10 (2012).
4. *Beating the jetting regime*. A. Sauret & H.C. Shum. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, **13**(5), 351-362 (2012).
5. *Fluctuation-induced dynamics of multiphase liquid jets with ultra-low interfacial tension*. A. Sauret, C. Spandagos & H.C. Shum. Lab on Chip, **12**, 3380-3386 (2012).
6. *Generation of monodisperse water-water emulsion in coflow microcapillary device*. A. Sauret & H.C. Shum. Applied Physics Letters **100**, 154106 (2012).
7. *Fluid flows in a librating cylinder*. A. Sauret, D. Cébron, M. Le Bars & S. Le Dizès. Physics of Fluids **24**(2), 026603 (2012).
8. *Experimental and numerical study of mean zonal flows generated by librations of a rotating spherical cavity*. A. Sauret, D. Cébron, C. Morize & M. Le Bars. Journal of Fluid Mechanics **662**, 260-268 (2010).

Articles soumis ou en préparation

1. *Generation of zonal flow : on the analogy between temporal and azimuthal forcing*. A. Sauret (en préparation pour Physica D).
2. *Spontaneous generation of inertial waves from self-generated turbulence*. A. Sauret, D. Cébron, S. Le Dizès & M. Le Bars (en préparation pour Journal of Fluid Mechanics).
3. *Tides-driven shear instability in fluid cores and subsurface oceans*. A. Sauret, M. Le Bars, P. Le Gal & S. Le Dizès (en préparation pour Geophysical Research Letters).

Proceedings

1. *Smoothing out sandpiles : rotational bulldozing of granular material*. A. Sauret. GFD Proceeding Volumes (2012).
2. *Génération d'un vent zonal par libration*. A. Sauret, D. Cébron, M. Le Bars & S. Le Dizès. 20^{ème} congrès français de mécanique (2011).

Brevet

System for generation of emulsions with low interfacial tension. A. Sauret & H.C. Shum. Soumis en Mars 2012.

Chapitre de livre

Droplet formation for all-aqueous droplet microfluidics. A. Sauret dans *Green Microfluidics*. Éd. H.C. Shum, Pan Stanford Publishing (à paraître en 2013).

Bibliographie

- ABCHA, N., LATRACHE, N., DUMOUCHEL, F. & MUTABAZI, I. 2008 Qualitative relation between reflected light intensity by kalliroscope flakes and velocity field in the couette-taylor system. *Experiments in Fluids* **45**, 85–94.
- ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. A. 1965 *Handbook of Mathematical Functions*. New York : Dover.
- ALDRIDGE, K. D. 1967 An experimental study of axisymmetric inertial oscillations of a rotating liquid sphere. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- ALDRIDGE, K. D. 1972 Axisymmetric inertial oscillations of a fluid in a rotating spherical shell. *Mathematica* **19** (2), 163–168.
- ALDRIDGE, K. D. & LUMB, L. I. 1987 Inertial waves identified in the earth’s fluid outer core. *Nature* **325**, 421–423.
- ALDRIDGE, K. D. & TOOMRE, A. 1969 Axisymmetric inertial oscillations of a fluid in a rotating spherical container. *Journal of Fluid Mechanics* **37**, 307–323.
- ANDERECK, C. D., LIU, S. S. & SWINNEY, H. L. 1986 Flow regimes in a circular couette system with independently rotating cylinders. *Journal of Fluid Mechanics* **164**, 155–183.
- ANDERSON, J. D., JACOBSON, R. A., McELRATH, T. P., MOORE, W. B., SCHUBERT, G. & THOMAS, P. C. 2001 Shape, mean radius, gravity field, and interior structure of callisto. *Icarus* **153** (1), 157–161.
- ANSONG, J. K. & SUTHERLAND, B. R. 2010 Internal gravity waves generated by convective plumes. *Journal of Fluid Mechanics* **648**, 405–434.
- ARDHUIN, F., MARIÉ, L., RASCLE, N., FORGET, P. & ROLAND, A. 2009 Observation and estimation of lagrangian, stokes, and eulerian currents induced by wind and waves at the sea surface. *Journal of Physical Oceanography* **39** (11), 2820–2838.
- AURNOU, J. M. & OLSON, P. L. 2001 Strong zonal winds from thermal convection in a rotating spherical shell. *Geophysical Research Letters* **28**, 2557–2559.
- BARCILON, V. 1968 Stewartson layers in transient rotating fluid flows. *Journal of Fluid Mechanics* **33**, 815–825.
- BENTON, E. R. & CLARK, A. 1974 Spin-up. *Annual Review of Fluid Mechanics* **6** (1), 257–280.

- BLAND, M. T., SHOWMAN, A. P. & TOBIE, G. 2008 The production of Ganymede's magnetic field. *Icarus* **198** (2), 384–399.
- BLAND, M. T., SHOWMAN, A. P. & TOBIE, G. 2009 The orbital-thermal evolution and global expansion of ganymede. *Icarus* **200** (1), 207–221.
- BLENNERHASSETT, P. J. & BASSOM, A. P. 2007 The linear stability of high-frequency flow in a torsionally oscillating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **576**, 491–505.
- BOFFETTA, G. & ECKE, R. E. 2012 Two-dimensional turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics* **44**, 424–451.
- BOISSON, J., LAMRIBEN, C., MAAS, L. R. M., CORTET, P.-P. & MOISY, F. 2012 Inertial waves and modes excited by the libration of a rotating cube. *Physics of Fluids* **24**, 076602.
- BONDI, H. & LYTTLETON, R. A. 1953 On the dynamical theory of the rotation of the earth. ii. the effect of precession on the motion of liquid core. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **49**, 498–515.
- BONNETON, P., CHOMAZ, J. M. & HOPFINGER, E. J. 1993 Internal waves produced by the turbulent wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics* **254**, 23–40.
- BORDES, G., VENAILLE, A., JOUBAUD, S., ODIER, P. & DAUXOIS, T. 2012 Experimental observation of a strong mean flow induced by internal gravity waves. *Physics of Fluids* **24**, 086602.
- BUSH, J. W. M., STONE, H. A. & BLOXHAM, J. 1995 Axial drop motion in rotating fluids. *Journal of Fluid Mechanics* **282**, 247–278.
- BUSSE, F. H. 1968*a* Shear flow instabilities in rotating systems. *Journal of Fluid Mechanics* **33**, 577–589.
- BUSSE, F. H. 1968*b* Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell. *Journal of Fluid Mechanics* **33**, 739–751.
- BUSSE, F. H. 1976 A simple model of convection in the jovian atmosphere. *Icarus* **29**, 255–260.
- BUSSE, F. H. 2002 Convective flows in rapidly rotating spheres and their dynamo action. *Physics of Fluids* **14** (4), 1301–1314.
- BUSSE, F. H. 2010*a* Mean zonal flows generated by librations of a rotating spherical cavity. *Journal of Fluid Mechanics* **650**, 505–512.
- BUSSE, F. H. 2010*b* Zonal flow induced by longitudinal librations of a rotating cylindrical cavity. *Physica D* **240**, 208–211.
- CALKINS, M. A., NOIR, J., ELDREDGE, J. D. & AURNOU, J. M. 2010 Axisymmetric simulations of libration-driven fluid dynamics in a spherical shell geometry. *Physics of Fluids* **22**, 086602.
- CARTAN, M. E. 1922 Sur les petites oscillations d'une masse fluide. *Bulletin des Sciences Mathématiques* **46**, 317–352.

- CÉBRON, D. 2011 Instabilité elliptique dans les enveloppes fluides des planètes et des étoiles. PhD thesis, Université de Provence - Aix-Marseille I, Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre.
- CÉBRON, D., LE BARS, M., LE GAL, P., MOUTOU, C., LECONTE, J & SAURET, A. 2013 (in press) Elliptical instability in hot-jupiter systems. *Icarus* .
- CÉBRON, D., LE BARS, M., LEONTINI, J., MAUBERT, P. & LE GAL, P. 2010a A systematic numerical study of the tidal instability in a rotating ellipsoid. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **182**, 119–128.
- CÉBRON, D., LE BARS, M., MAUBERT, P. & LE GAL, P. 2012a Magnetohydrodynamic simulations of the elliptical instability in triaxial ellipsoids. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* **106** (4-5), 524–546.
- CÉBRON, D., LE BARS, M., MOUTOU, C. & LE GAL, P. 2012b Elliptical instability in terrestrial planets and moons. *Astronomy & Astrophysics* **A78**, 539.
- CÉBRON, D., LE BARS, M., NOIR, J. & AURNOU, J. M. 2012c Libration driven elliptical instability. *Physics of Fluids* **24**, 061703.
- CÉBRON, D., MAUBERT, P. & LE BARS, M. 2010b Tidal instability in a rotating and differentially heated ellipsoidal shell. *Geophysical Journal International* **182**, 1311–1318.
- CHAN, K. H. 2012 Nonlinear flow within a triaxial ellipsoidal planet driven by combined longitudinal and latitudinal libration. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **194-195**, 64–70.
- CHAN, K. H., LIAO, X. & ZHANG, K. 2011a Simulations of fluid motion in spheroidal planetary cores driven by latitudinal libration. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **187**, 404–415.
- CHAN, K. H., LIAO, X. & ZHANG, K. K. 2011b Simulations of fluid motion in ellipsoidal planetary cores driven by longitudinal libration. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **187**, 391–403.
- CHANDRASEKHAR, S. 1961 *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford : Clarendon Press.
- CHARRU, F. 2007 *Instabilité hydrodynamiques*. EDP Sciences.
- COMSTOCK, R. L. & BILLS, B. G. 2003 A solar system survey of forced librations in longitude. *Journal of Geophysical Research* **108**, 1–13.
- CORTET, P.-P., LAMRIBEN, C. & MOISY, F. 2010 Viscous spreading of an inertial wave beam in a rotating fluid. *Physics of Fluids* **22**, 086603.
- COUETTE, M/ 1890 études sur le frottement des liquides. *Annales de chimie et de physique* **21**, 433–510.
- CRAIK, A. D. D. 2005 George gabriel stokes on water wave theory. *Annual Review of Fluid Mechanics* **37**, 23–42.

- CUSHMAN-ROISIN, B. & BECKERS, J. M. 2010 *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics : Physical and Numerical Aspects, 2nd Edition*. Academic Press inc.
- DAUXOIS, T. & YOUNG, W. R. 1999 Near critical reflection of internal waves. *Journal of Fluid Mechanics* **390**, 271–295.
- DOHAN, K. & SUTHERLAND, B. R. 2003 Internal waves generated from a turbulent mixed region. *Physics of Fluids* **15**, 488–498.
- DOHAN, K. & SUTHERLAND, B. R. 2005 Numerical and laboratory generation of internal waves from turbulence. *Dynamics of Atmospheres and Oceans* **40**, 43–56.
- DORMY, E., CARDIN, P. & JAULT, D. 1998 Mhd flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field. *Earth and Planetary Science Letters* **160**, 15–30.
- DRAZIN, P. G. & REID, W. H. 1981 *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press.
- DUCK, P. W. & FOSTER, M. R. 2001 Spin-up of homogeneous and stratified fluids. *Annual Review of Fluid Mechanics* **33** (1), 231–263.
- DUGUET, Y. 2004 Simulation numérique de l’instabilité dans un cylindre de gaz tournant soumis à une compression périodique. PhD thesis, École Centrale Lyon.
- DUGUET, Y., SCOTT, J. F. & LE PENVEN, L. 2005 Instability inside a rotating gas cylinder subject to axial periodic strain. *Physics of Fluids* **17**, 114103.
- DUGUET, Y., SCOTT, J. F. & LE PENVEN, L. 2006 Oscillatory jets and instabilities in a rotating cylinder. *Physics of Fluids* **18** (10), 104104.
- E. J. GAIDOS, K. H. NEALSON, J. L. KIRSCHVINK 1999 Life in ice-covered oceans. *Science* **284**, 1631–1633.
- ELOY, C. 2000 Instabilité multipolaire de tourbillons. PhD thesis, Université Aix-Marseille II, Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre.
- ELOY, C., LE GAL, P. & LE DIZÈS, S. 2000 Experimental study of the multipolar vortex instability. *Physical Review Letters* **85**, 3400–3403.
- ERN, P. & WESFREID, J. E. 1999 Flow between time-periodically co-rotating cylinders. *Journal of Fluid Mechanics* **397**, 73–98.
- FISCHER, D. A., MARCY, G. W., BUTLER, R. P. & AL 2008 Five planets orbiting 55 cancri. *The Astrophysical Journal* **675**, 790–801.
- GAEMAN, J., HIER-MAJUMDER, S. & ROBERTS, J. H. 2012 Sustainability of a subsurface ocean within triton’s interior. *Icarus* **220**, 339 – 347.
- GANS, R. F. 1970 On the precession of a resonant cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **476**, 865–872.
- GARRETT, C. & MUNK, W. 1979 Internal waves in the ocean. *Annual Review of Fluid Mechanics* **11**, 339–369.

- GLATZMAIER, G. A. & ROBERTS, P. H. 1995*a* A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. *Physics of Earth and Planetary Interiors* **91**, 63–75.
- GLATZMAIER, G. A. & ROBERTS, P. H. 1995*b* A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature* **377**, 203–209.
- GOLDREICH, P. & PEALE, S. 1966 Spin-orbit coupling in the solar system. *The Astronomical Journal* **397**, 73–98.
- GOLDREICH, P. M. & MITCHELL, J. L. 2010 Elastic ice shells of synchronous moons : implications for cracks on europa and non-synchronous rotation of titan. *Icarus* **209**, 631–638.
- GOTO, S., KIDA, S. & FUJIWARA, S. 2011 Flow visualization using reflective flakes. *Journal of Fluid Mechanics* **683**, 417–429.
- GRAFTIEAUX, L. 2003 Etude expérimentale de l’instabilité d’un cylindre tournant soumis à une compression périodique. PhD thesis, École Centrale Lyon.
- GRASSET, O., SOTIN, C. & DESCHAMPS, F. 2000 On the internal structure and dynamics of titan. *Planetary and Space Science* **48** (7-8), 617–636.
- GREENSPAN, H. P. 1968 *The Theory of rotating fluids*. Cambridge University Press, Cambridge.
- GROTE, E., BUSSE, F. H. & TILGNER, A. 2000 Regular and chaotic spherical dynamos. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **117**, 259 – 272.
- GUERVILLY, C., CARDIN, P. & SCHAEFFER, N. 2012 A dynamo driven by zonal jets at the upper surface : Applications to giant planets. *Icarus* **218**, 100–114.
- HAND, K. P., KHURANA, K. K. & CHYBA, C. F. 2011 Joule heating of the south polar terrain on enceladus. *Journal of Geophysical Research* **116**, E04010.
- HAUCK, S. A., DOMBARD, A. J., PHILLIPS, R. J. & SOLOMON, S. C. 2004 Internal and tectonic evolution of mercury. *Earth and Planetary Science Letters* **222** (3-4), 713–728.
- HELFRICH, K. R. & MELVILLE, K. 2006 Long nonlinear internal waves. *Annual Review of Fluid Mechanics* **38**, 395–425.
- HERBERT, T. 1986 Viscous fluid motion in a spinning and nutating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **167**, 181–198.
- HERREMAN, W. 2009 Instabilité elliptique sous champ magnétique & dynamo d’ondes inertielles. PhD thesis, Université de Provence - Aix-Marseille I, Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre.
- HERREMAN, W., LE BARS, M. & LE GAL, P. 2009 On the effects of an imposed magnetic field on the elliptical instability in rotating spheroids. *Physics of Fluids* **21**, 046602.
- HINDMARSH, A. C., BROWN, P. N., GRANT, K. E., LEE, S. L., SERBAN, R., SHUMAKER, D. E. & WOODWARD, C. S. 2005. Sundials : Suite of nonlinear and differential/algebraic equation solvers. *ACM Transactions on Mathematical Software* **31**, 363–396.

- HOEPFFNER, J. & FUKAGATA, K. 2009 Pumping or drag reduction. *Journal of Fluid Mechanics* **635**, 171–187.
- HOLLERBACH, R. 2003 Instabilities of the stewartson layer. part 1. the dependence on the sign of Ω . *Journal of Fluid Mechanics* **492**, 289–302.
- HOLLERBACH, R. & KERSWELL, R. R. 1995 Oscillatory internal shear layers in rotating and precessing flows. *Journal of Fluid Mechanics* **298**, 327–339.
- HOUGH, S. S. 1897 On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of the tides. part i. on laplace's "oscillations of the first species," and on the dynamics of ocean currents. *Proceedings of the Royal Society of London A* **189**, 201–257.
- HOWETT, C. J. A., SPENCER, J. R., PEARL, J. & SEGURA, M. 2011 High heat flow from enceladus' south polar region measured using 10–600 cm² cassini/cirs data. *Journal of Geophysical Research* **116**, E03003.
- HUSSMANN, H. & SPOHN, T. 2004 Thermal-orbital evolution of Io and Europa. *Icarus* **171** (2), 391–410.
- INGERSOLL, A. P. 1990 Atmospheric dynamics of the outer planets. *Science* **344**, 315–317.
- INGERSOLL, A. P. & POLLARD, D. 1982 Motion in the interiors and atmospheres of jupiter and saturn - scale analysis, anelastic equations, barotropic stability criterion. *Icarus* **52**, 62–80.
- JAFFRIN, M. Y. & SHAPIRO, A. H. 1971 Peristaltic pumping. *Annual Review of Fluid Mechanics* **3**, 13–37.
- KARGEL, J. S., KAYE, J. Z., HEAD, J. W., MARION, G. M., SASSEN, R., CROWLEY, J. K., BALLESTEROS, O. P., GRANT, S. A. & HOGENBOOM, D. L. 2000 Europa's crust and ocean : Origin, composition, and the prospects for life. *Icarus* **148** (1), 226–265.
- KELVIN, LORD 1880 Vibrations of a columnar vortex. *Philosophical Magazine* **10** (5), 155–168.
- KERSWELL, R. R. 1995 On the internal shear layers spawned by the critical regions in oscillatory ekman boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics* **298**, 311–325.
- KERSWELL, R. R. 2002 Elliptical instability. *Annual Review Fluid Mechanics* **34**, 83–113.
- KERSWELL, R. R. & MALKUS, W. V. R. 1998 Tidal instability as the source for Io's magnetic signature. *Geophysal Research Letter* **25**, 603–606.
- KIDA, S. 2011 Steady flow in a rapidly rotating sphere with weak precession. *Journal of Fluid Mechanics* **680**, 150–193.
- KOBINE, J. J. 1995 Inertial wave dynamics in a rotating and precessing cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **303**, 233–252.
- KOCH, S., HARLANDER, U., HOLLERBACH, R. & EGBERS, C. 2011 Laboratory experiments and numerical simulations of inertial wave-interactions in a rotating spherical shell. *Journal of Physics : Conference Series* **318**, 082022.
- KRAICHNAN, R. H. 1967 Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Physics of Fluids* **10**, 1417.

- KUHN, J. R., AMSTRONG, J. D., BUSH, R. I. & SCHERRER, P. 2000 Rossby waves on the sun as revealed by solar 'hills'. *Nature* **405**, 544–546.
- KUSKOV, OL & KRONROD, VA 2005 Internal structure of Europa and Callisto. *Icarus* **177** (2), 550–569.
- LACAZE, L. 2004 L'instabilité elliptique : exemples en aéronautique et en géophysique. PhD thesis, Université de Provence - Aix-Marseille I, Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre.
- LACAZE, L., LE GAL, P. & LE DIZÈS, S. 2004 Elliptical instability in a rotating spheroid. *Journal of Fluid Mechanics* **505**, 1–22.
- LACAZE, L., LE GAL, P. & LE DIZÈS, S. 2005 Elliptical instability of a flow in a rotating shell. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **151**, 194–205.
- LAGRANGE, R. 2009 Dynamique d'un fluide dans un cylindre en précession. PhD thesis, Université de Provence.
- LAGRANGE, R., ELOY, C., NADAL, F. & MEUNIER, P. 2008 Instability of a fluid inside a precessing cylinder. *Physics of Fluids* **20**, 081701.
- LAGRANGE, R., MEUNIER, P., ELOY, C. & NADAL, F. 2010 Precessional instability of a fluid cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **66**, 104–145.
- LAMRIBEN, C. 2011 Transferts anisotropes d'énergie en turbulence en rotation et excitation de modes d'inertie. PhD thesis, Université Paris Sud.
- LAMRIBEN, C., CORTET, P.-P., MOISY, F. & MAAS, L.R.M. 2011 Excitation of inertial modes in a closed grid turbulence experiment under rotation. *Physics of Fluids* **23**, 015102.
- LE BARS, M., LACAZE, M., LE DIZÈS, S., LE GAL, P. & RIEUTORD, M. 2010 Tidal instability in stellar and planetary binary system. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **178**, 48–55.
- LE BARS, M., WIECZOREK, M. A., KARATEKIN, Ö., CÉBRON, D. & LANEUVILLE, M. 2011 An impact-driven dynamo for the early moon. *Nature* **479**, 215–218.
- LE DIZÈS, S. 2000 Three-dimensional instability of a multipolar vortex in a rotating flow. *Physics of Fluids* **12**, 2762–2774.
- LE DIZÈS, S. & ELOY, C. 1999 Short-wavelength instability of a vortex in a multipolar strain field. *Physics of Fluids* **11**, 500–502.
- LE DIZÈS, S. & ELOY, C. 1999 Short-wavelength instability of a vortex in a multipolar strain field. *Physical of Fluids* **11**, 500–502.
- LÉGER, A., GRASSET, O., FEGLEY, B., CODRON, F., ALBAREDE, AF, BARGE, P., BARNES, R., CANCE, P., CARPY, S., CATALANO, F. *et al.* 2011 The extreme physical properties of the corot-7b super-earth. *Icarus* .
- LIGHTHILL, J. 1978 *Waves in fluids*. Cambridge University Press.

- LOPEZ, J. M. & MARQUES, F. 2011 Instabilities and inertial waves generated in a librating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **687**, 171–193.
- LORENZ, R. D., STILES, B. W., KIRK, R. L., ALLISON, M. D., MARMO, P. P. DEL, IESS, L., LUNINE, J. I., OSTRO, S. J. & HENSLEY, S. 2008 Titan's rotation reveals an internal ocean and changing zonal winds. *Science* **319** (5870), 1649–1651.
- LORENZANI, S. & TILGNER, A. 2001 Fluid instabilities in precessing spheroidal cavities. *Journal of Fluid Mechanics* **447**, 111–128.
- MAAS, L. R. M. 2001 Wave focusing and ensuing mean flow due to symmetry breaking in rotating fluids. *Journal of Fluid Mechanics* **437**, 13–28.
- MAAS, L. R. M., BENIELLI, D., SOMMERIA, J. & LAM, F. P. A. 1994 Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid. *planets* **369**, 628–630.
- MAAS, L. R. M. & HARLANDER, U. 2007 Equatorial wave attractors and inertial oscillations. *Journal of Fluid Mechanics* **570**, 47–67.
- MAAS, L. R. M. & LAM, F.-P. A. 1995 Geometric focusing of internal waves. *Journal of Fluid Mechanics* **300**, 1–41.
- MALKUS, W. V. R. 1968 Precession of the earth as the cause of geomagnetism. *Science* **160**, 259–264.
- MALKUS, W. V. R. 1989 An experimental study of global instabilities due to tidal (elliptical) distortion of a rotating elastic cylinder. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **48**, 123–134.
- MALKUS, W. V. R. 1993 *Lectures on Solar and Planetary Dynamos (Energy sources for planetary dynamos)*. Cambridge University Press, London, (ed. M.R.E. Proctor, A.D. Gilbert).
- MAMORI, H., FUKAGATA, K. & HOEPFFNER, J. 2010 Phase relationship in laminar channel flow controlled by traveling-wave-like blowing or suction. *Physical Review E* **81**, 046304.
- MANASSEH, R. R. 1992 Breakdown regime of inertia waves in a precessing cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **243**, 261–296.
- MARGOT, J. L., PEALE, S. J., JURGENS, R. F., SLADE, M. A. & HOLIN, I. V. 2007 Large amplitude libration of Mercury reveals a molten core. *Science* **316** (5825), 710–714.
- MATSON, D. L., CASTILLO-ROGEZ, J. C., DAVIES, A. G. & JOHNSON, T. V. 2012 Enceladus : A hypothesis for bringing both heat and chemicals to the surface. *Icarus* **22**, 53 – 62.
- MERCIER, M., MARTINAND, D., MATHUR, M., GOSTIAUX, L., PEACOCK, T. & DAUXOIS, T. 2010 New wave generation. *Journal of Fluid Mechanics* **657**, 308–3348.
- MESSIO, L., MORIZE, C., RABAUD, M. & MOISY, F. 2008 Experimental observation using particle image velocimetry of inertial waves in a rotating fluid. *Experiments in Fluids* **44**, 519–528.
- MEUNIER, P., ELOY, C., LAGRANGE, R. & NADAL, F. 2008 A rotating fluid subject to weak precession. *Journal of Fluid Mechanics* **599**, 405–440.

- MEUNIER, P. & LEWEKE, T. 2003 Analysis and minimization of errors due to high gradients in particle image velocimetry. *Experiments in Fluids* **35** (5), 408–421.
- MONISMITH, S. G. 2007 Hydrodynamics of coral reefs. *Annual Review of Fluid Mechanics* **39**, 37–55.
- MORIZE, C. 2006 De la turbulence 3d en déclin à la turbulence anisotrope dominée par la rotation. PhD thesis, Université Paris 7 - Denis Diderot.
- MORIZE, C., LE BARS, M., LE GAL, P., & TILGNER, A. 2010 Experimental determination of zonal winds driven by tides. *Physical Review Letters* **104**, 214501.
- MUNROE, J. R. & SUTHERLAND, B. R. 2008 Generation of internal waves by sheared turbulence. *Environmental Fluid Mechanics* **8**, 527–534.
- MURRAY, C. D. & DERMOTT, S. F. 1999 *Solar system dynamics*. Cambridge University Press.
- NEITZEL, G. P. & DAVIS, S. H. 1981 Centrifugal instabilities during spin-down to rest in finite cylinders numerical experiments. *Journal of Fluid Mechanics* **102**, 329–352.
- NETTELMANN, N., KRAMM, U., REDMER, R. & NEUH, R. 2010 Interior structure models of gj 436b. *Arxiv preprint arXiv :1002.4447* .
- NOIR, J. 2000 écoulement d'un fluide dans une cavité en précession : approches numériques et expérimentales. PhD thesis, Université Joseph-Fourier, Grenoble 1.
- NOIR, J., CALKINS, M. A., LASBLEIS, M., CANTWELL, J. & AURNOU, J. M. 2010 Experimental study of libration-driven zonal flows in a straight cylinder. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **182**, 98–106.
- NOIR, J., CARDIN, P., JAULT, D. & MASSON, J.-P. 2003 Experimental evidence of nonlinear resonance effects between retrograde precession and the tilt-over mode within a spheroid. *Geophysical Journal International* **154**, 407–416.
- NOIR, J., CÉBRON, D., BARS, M. LE, SAURET, A. & AURNOU, J.M. 2012 Experimental study of libration-driven zonal flows in non-axisymmetric containers. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **204-205**, 1–10.
- NOIR, J., HEMMERLIN, F., WICHT, J., BACA, S. M. & AURNOU, J. M. 2009 An experimental and numerical study of librational flow in planetary cores and subsurface oceans. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **173**, 141–152.
- NOIR, J., JAULT, D. & P., CARDIN 2001 Numerical study of the motions within a slowly precessing sphere at low ekman number. *Journal of Fluid Mechanics* **437**, 283–299.
- NORE, C., GUERMOND, J.-L., LAGUERRE, R., LÉORAT, J. & LUDDENS, F. 2012 Nonlinear dynamo in a short taylor-couette setup. *Physics of Fluids* **24**, 094106.
- NORE, C., LÉORAT, J., GUERMOND, J.-L. & LUDDENS, F. 2011a Nonlinear dynamo action in a cylindrical container driven by precession. *Journal of Physics : Conference Series* **318**, 072034.
- NORE, C., LÉORAT, J., GUERMOND, J.-L. & LUDDENS, F. 2011b Nonlinear dynamo action in a precessing cylindrical container. *Physical Review E* **84**, 016317.

- OGILVIE, G. I. 2005 Wave attractors and the asymptotic dissipation rate of tidal disturbances. *Journal of Fluid Mechanics* **543**, 19–44.
- PEDLOSKY, J. 1987 *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer, New York.
- POINCARÉ, H. 1910 Sur la précession des corps déformables. *Bulletin Astronomique, Série I* **27**, 321–356.
- PROUDMAN, I. 1956 The almost-rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres. *Journal of Fluid Mechanics* **1**, 505 – 516.
- PROUDMAN, J. 1916 On the motion of solids in a liquid possessing vorticity. *Proceedings of the Royal Society of London A* **92**, 408–424.
- RACZ, J.-P. 2006 Instabilité paramétrique dans un cylindre de gaz en rotation soumis à la compression périodique d’un piston. PhD thesis, École Centrale Lyon.
- RACZ, J.-P. & SCOTT, J. F. 2008*a* Parametric instability in a rotating cylinder of gas subject to sinusoidal axial compression. part 1. linear theory. *Journal of Fluid Mechanics* **595**, 265–290.
- RACZ, J.-P. & SCOTT, J. F. 2008*b* Parametric instability in a rotating cylinder of gas subject to sinusoidal axial compression. part 2. weakly nonlinear theory. *Journal of Fluid Mechanics* **595**, 291–321.
- RAMBAUX, N., HOOLST, T. VAN & KARATEKIN, Ö. 2011 Librational response of europa, ganymede, and callisto with an ocean for non-keplerian orbit. *Astronomy & Astrophysics* **527**, A118.
- RAYLEIGH, LORD 1879 On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proceedings London Mathematical Society* **s1-11**, 57–72.
- RAYLEIGH, LORD 1917 On the dynamics of revolving fluids. *Proceedings of the Royal Society A* **93**, 148–154.
- RIEUTORD, M. 1991 Linear theory of rotating fluids using spherical harmonics - II. time-periodic flows. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **59**, 185–208.
- RIEUTORD, M., GEORGEOT, B. & VALDETTARO, L. 2000 Wave attractors in rotating fluids : a paradigm for ill-posed cauchy problems. *Physical Review Letters* **85**, 4277–4280.
- RIEUTORD, M., GEORGEOT, B. & VALDETTARO, L. 2001 Inertial waves in a rotating spherical shell : attractors and asymptotic spectrum. *Journal of Fluid Mechanics* **435**, 103–144.
- RIEUTORD, M. & NOUI, K. 1991 On the analogy between gravity modes and inertial modes in spherical geometry. *European Physical Journal B* **9**, 731–738.
- RIEUTORD, M., TRIANA, S., ZIMMERMAN, D. S. & LATHROP, D. P. 2012 Excitation of inertial modes in an experimental spherical couette flow. *Physical Review E* **86**, 026304.
- RIEUTORD, M. & VALDETTARO, L. 1997 Inertial waves in a rotating spherical shell. *Journal of Fluid Mechanics* **59**, 77–99.
- RIEUTORD, M. & VALDETTARO, L. 2010 Viscous dissipation by tidally forced inertial modes in a rotating spherical shell. *Journal of Fluid Mechanics* **643**, 363–394.

- RIEUTORD, M., VALDETTARO, L. & GEORGEOT, B. 2002 Analysis of singular inertial modes in a spherical shell : the slender toroidal shell model. *Journal of Fluid Mechanics* **463**, 345–360.
- RILEY, N. 2001 Steady streaming. *Annual Review of Fluid Mechanics* **33**, 43–65.
- ROBERTS, P. H. & STEWARTSON, K. 1963 On the stability of a maclaurin spheroid of small viscosity. *Astrophysical Journal* **137**, 770–790.
- ROTHSCHILD, L. J. & MANCINELLI, R. L. 2001 Life in extreme environments. *Nature* **409**, 1092–1101.
- SARIC, W. S. 1994 Görtler vortices. *Annual Review of Fluid Mechanics* **26**, 379–409.
- SAURET, A., CÉBRON, D., LE BARS, M. & LE DIZÈS, S. 2012a Fluid flows in a librating cylinder. *Physics of Fluids* **24**, 026603.
- SAURET, A., CÉBRON, D., MORIZE, C. & LE BARS, M. 2010 Experimental and numerical study of mean zonal flows generated by librations of a rotating spherical cavity. *Journal of Fluid Mechanics* **662**, 260–268.
- SAURET, A. & LE DIZÈS, S. 2013 Libration-induced mean flow in a spherical shell. *Journal of Fluid Mechanics* **718**, 181–209.
- SAURET, A. & SHUM, H. C. 2012a Beating the jetting regime. *International Journal of Non-linear Sciences and Numerical Simulation* **13**, 351–362.
- SAURET, A. & SHUM, H. C. 2012b Forced generation of simple and double emulsions in all-aqueous systems. *Applied Physics Letters* **110**, 154106.
- SAURET, A., SPANDAGOS, C. & SHUM, H. C. 2012b Fluctuation-induced dynamics of multi-phase liquid jets with ultra-low interfacial tension. *Lab on a Chip* **12**, 3380–3386.
- SCHAEFFER, N. & CARDIN, P. 2005 Quasigeostrophic model of the instabilities of the stewartson layer in flat and depth varying containers. *Physics of Fluids* **17**, 104111.
- SCHAEFFER, N. & CARDIN, P. 2006 Quasi-geostrophic kinematic dynamos at low magnetic prandtl number. *Earth and Planetary Science Letters* **245**, 595–604.
- SKAFTE-PEDERSEN, P., SABOURIN, D., DUFVA, M. & SNAKENBORG, D. 2009 Multi-channel peristaltic pump for microfluidic applications featuring monolithic pdms inlay. *Lab on a Chip* **9**, 3003–3006.
- SOHL, F., HUSSMANN, H., SCHWENTKER, B., SPOHN, T. & LORENZ, RD 2003 Interior structure models and tidal Love numbers of Titan. *J. Geophys. Res* **108** (10.1029).
- SPOHN, T. & SCHUBERT, G. 2003 Oceans in the icy galilean satellites of jupiter. *Icarus* **161** (2), 456–467.
- STAQUET, C. & SOMMERIA, J. 2002 Internal gravity waves : from instability to turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics* **34**, 559–593.
- STEWARTSON, K. 1957 On almost rigid rotations. *Journal of Fluid Mechanics* **3**, 17 – 26.
- STEWARTSON, K. 1958 On the stability of a spinning top containing liquid. *Journal of Fluid Mechanics* **5**, 577–592.

- STEWARTSON, K. 1966 On almost rigid rotations. part 2. *Journal of Fluid Mechanics* **26**, 131–144.
- STEWARTSON, K. & ROBERTS, P. H. 1963 On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of precessing rigid body. *Journal of Fluid Mechanics* **17**, 1–20.
- STOKES, G. G. 2009 *On the Theory of Oscillatory Waves*. Cambridge University Press.
- SUESS, S. T. 1970 Some effects of gravitational tides on a rotating fluid. PhD thesis, University of California.
- SUESS, S. T. 1971 Viscous flow in a deformable rotating container. *Journal of Fluid Mechanics* **45**, 189–201.
- SUTHERLAND, B. R., DALZIEL, S. B., HUGUES, G. O. & LINDEN, P. F. 1999 Visualization and measurement of internal waves by syntheric schlieren. part 1 : vertically oscillating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **390**, 93–126.
- SWART, A. AND MAAS, L.R.M., HARLANDER, U. & MANDERS, A. 2010 Experimental observation of strong mixing due to internal wave focusing over sloping terrain. *Dynamics of Atmospheres and Oceans* **50**, 16–34.
- SYNGE, J. L. 1933 The stability of heterogeneous liquids. *Transactions of the Royal Society of Canada* **27**, 1–18.
- TAYLOR, G. I. 1917 Motion of solids in fluids when the flow is not irrotational. *Proceedings of the Royal Society of London A* **93**, 92–113.
- TAYLOR, G. I. 1923 Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Philosophical transactions of the Royal Society A* **223**, 605–615.
- TAYLOR, J. R. & SARKAR, S. 2007 Internal gravity waves generated by a turbulent bottom ekman layer. *Journal of Fluid Mechanics* **590**, 331–354.
- TERRAY, A., OAKEY, J. & MARR, D. W. M. 2002 Microfluidic control using colloidal devices. *Science* **296**, 1841–1844.
- TILGNER, A. 1999a Driven inertial oscillations in spherical shells. *Physical Review E* **59**, 1789–1794.
- TILGNER, A. 1999b Magnetohydrodynamic flow in precessing spherical shells. *Journal of Fluid Mechanics* **379**, 303–318.
- TILGNER, A. 2000 Oscillatory shear layers in source driven flows in an unbounded fluid. *Physics of Fluids* **12**, 1101–1111.
- TILGNER, A. 2005 Precession driven dynamo. *Physics of Fluids* **17**, 034104.
- TILGNER, A. 2007 Zonal wind driven by inertial modes. *Physical Review Letters* **99**, 194501.
- TILGNER, A. & BUSSE, F. H. 2001 Fluid flows in precessing spherical shells. *Journal of Fluid Mechanics* **426**, 387–396.
- TOBIE, G., GRASSET, O., LUNINE, J.I., MOCQUET, A. & SOTIN, C. 2005 Titan's internal structure inferred from a coupled thermal-orbital model. *Icarus* **175**, 496–502.

- TOWNSEND, A. A. 1965 Excitation of internal waves by a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics* **22**, 241–252.
- TOWNSEND, A. A. 1966 Internal waves produced by a convective layer. *Journal of Fluid Mechanics* **24**, 307–319.
- VAN HOOLST, T., SOHL, F., HOLIN, I., VERHOEVEN, O., DEHANT, V. & SPOHN, T. 2007 Mercury : Interior structure, rotation, and tides. *Space science reviews* **132** (2), 203–227.
- VAN HOOLST, T. V., RAMBAUX, N., KARATEKIN, Ö. & BALAND, R.-M. 2009 The effect of gravitational and pressure torques on titan’s length-of-day variations. *Icarus* **200**, 256–264.
- VAN HOOLST, T. V., RAMBAUX, N., KARATEKIN, Ö., DEHANT, V. & RIVOLDINI, A. 2008 The librations, shape and icy shell of Europa. *Icarus* **195** (1), 386–399.
- VANYO, J. P., WILDE, P., CARDIN, P. & OLSON, P. 1995 Experiments on precessing flows in the earth’s liquid core. *Geophysical Journal International* **121**, 136–142.
- VERONIS, G. 1970 The analogy between rotating and stratified fluids. *Annual Review of Fluid Mechanics* **2**, 37–661.
- VOISIN, B. 2003 Limit states of internal waves. *Journal of Fluid Mechanics* **496**, 243–293.
- WAHR, J.M., ZUBER, M.T., SMITH, D.E. & LUNINE, J.I. 2006 Tides on Europa, and the thickness of Europa’s icy shell. *J. Geophys. Res.* **111**.
- WALTON, I. 1975 Viscous shear layers in an oscillating rotating fluid. *Proceedings of the Royal Society London A* **344**, 101–110.
- WANG, C. Y. 1970 Cylindrical tank of fluid oscillating about a steady rotation. *Journal of Fluid Mechanics* **41**, 581–592.
- WEDEMEYER, E. H. 1964 The unsteady flow within a spinning cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **20**, 383–399.
- WEIDMAN, P. D. 1976 Spin-up and spin-down of a rotating fluid. part 2. measurements and stability. *Journal of Fluid Mechanics* **77**, 709–735.
- WICHT, J. 2002 Inner-core conductivity in numerical dynamo simulations. *Physics of Earth and Planetary Interiors* **132**, 281–302.
- WIECZOREK, M. A., CORREIA, A. C. M., LE FEUVRE, M., LASKAR, J. & RAMBAUX, N. 2012 Mercury spin-orbit resonance explained by initial retrograde and subsequent synchronous rotation. *Nature Geoscience* **5**, 18–21.
- WILLIAMS, G. P. 1979 Planetary circulations : 2. the jovian quasi-geostrophic regimes. *Journal of the Atmospheric Sciences* **36**, 932–969.
- WINN, J.N., MATTHEWS, J.M., DAWSON, R.I., FABRYCKY, D., HOLMAN, M.J., KALLINGER, T., KUSCHNIG, R., SASSELOV, D., DRAGOMIR, D., GUENTHER, D.B. & AL. 2011 A super-earth transiting a naked-eye star. *Arxiv preprint arXiv :1104.5230* .
- WOOD, W. W. 1965 Properties of inviscid, recirculating flows. *Journal of Fluid Mechanics* **22**, 337–346.

- WOOD, W. W. 1966 An oscillatory disturbance of rigidly rotating fluid. *Proceedings of the Royal Society London A* **293**, 181–212.
- WU, C.-C. & ROBERT, P. H. 2012 On a dynamo driven topographically by longitudinal libration. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* .
- YOBAS, L., TANG, K. C., YONG, S. E. & ONG, E. K. Z. 2008 A disposable planar peristaltic pump for lab-on-a-chip. *Lab Chip* **8**, 660–662.
- ZHANG, K., CHAN, K. H. & LIAO, X. 2011 On fluid motion in librating ellipsoids with moderate equatorial eccentricity. *Journal of Fluid Mechanics* **673**, 468–479.
- ZHANG, K., EARNSHAW, P., LIAO, X. & BUSSE, F. H. 2001 On inertial waves in a rotating fluid sphere. *Journal of Fluid Mechanics* **437**, 103–119.
- ZHANG, K., LIAO, X. & EARNSHAW, P. 2004 On inertial waves and oscillations in a rapidly rotating spheroid. *Journal of Fluid Mechanics* **504**, 1–40.
- ZIEMECKA, I., VAN STEIJN, V., KOPER, G. J. M., ROSSO, M., BRIZARD, A. M., VAN ESCH, J. H. & KREUTZER, M. T. 2011 Monodisperse hydrogel microspheres by forced droplet formation in aqueous two-phase systems. *Lab on a Chip* **11**, 620–624.
- ZIMMERMAN, D. S., TRIANA, S. A. & LATHROP, D. P. 2011 Bi-stability in turbulent, rotating spherical couette flow. *Physics of Fluids* **6**, 065104.

Forçage harmonique d'écoulements en rotation: vents zonaux, ondes inertielles et instabilités

Résumé: Une grande quantité d'énergie est présente dans les mouvements de rotations propre et orbitale des planètes. Des forçages harmoniques tels que les déformations de marées, la précession ou la libration peuvent en convertir une partie pour générer des écoulements dans les couches fluides d'une planète. Ces écoulements restent largement méconnus même s'ils sont importants pour contraindre des modèles d'intérieur planétaire ou expliquer la présence de champs magnétiques dans certains astres.

Dans cette thèse, nous étudions les mécanismes engendrés par ces forçages en combinant une approche théorique, expérimentale et numérique et soulignons la généralité des phénomènes observés. L'étude d'un forçage de libration longitudinale, i.e. des oscillations de la vitesse de rotation d'un astre, montre la présence d'un écoulement zonal généré par des interactions nonlinéaires dans les couches visqueuses. Nous étudions ensuite l'instabilité qui apparaît à la paroi pour des amplitudes de libration suffisantes et qui peut transférer de l'énergie vers le volume du fluide. Finalement, une étude expérimentale de forçage de marées dans une sphère met en évidence que l'excitation directe d'ondes inertielles induit un écoulement zonal intense et localisé. Cet écoulement peut se déstabiliser par une instabilité de cisaillement et générer un écoulement turbulent dans tout le volume.

Pour finir, nous considérons la pertinence de ces résultats pour des applications géo-/astrophysiques, telles que l'étude des océans internes sous la surface de glace des satellites joviens Ganymède, Encelade et Europe.

Mots-Clés: forçages harmoniques, rotation, libration, marées, ondes inertielles, couches d'Ekman, instabilités, vent zonal.

Harmonic forcings in rotating flows: zonal winds, inertial waves and instabilities.

Abstract: A huge amount of energy is stored in the spin and orbital motions of any planet. Harmonic forcings such as libration, precession and tides are capable of conveying a portion of this energy to drive intense three-dimensional flows in liquid layers of planetary bodies. The generated flows remain largely unknown even if they are important to constraint model of planetary interior or to explain the presence of magnetic fields in some astrophysical bodies.

In this thesis, we study the mechanisms induced by these forcings by combining theoretical, experimental and numerical approaches and we highlight the genericity of the observed phenomena. The study of a longitudinal libration forcing, corresponding to oscillations of the rotation rate of a planet, shows the presence of a mean zonal flow generated by non-linear interactions in the viscous layers. We then study the instability which appears at the outer boundary at sufficiently large libration amplitude or small Ekman number and which can transfer energy to the bulk of the fluid. Finally, an experimental study of tidal forcing in a sphere shows that the nonlinear self-interaction of excited inertial waves may drive an intense and localised axisymmetric jet, which becomes unstable at low Ekman number following a shear instability, generating space-filling turbulence.

To conclude, we consider the relevance of these results to geo-/astrophysical applications, such as the subsurface oceans of the icy satellites Ganymede, Enceladus or Europa.

Keywords: Harmonic forcing, rotation, libration, tides, inertial waves, Ekman layers, instabilities, zonal flow.

